



UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO  
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS

---



**“Deformaciones de estructuras  
complejas en variedades complejas  
compactas”**

Tesis

Para optar el título profesional de

**Licenciada en Matemáticas**

Autora:

**Bach.Mat. Yuliana Villarreal Montenegro**

Asesor:

**M.Sc. Oscar Antonio Santamaria Santisteban**

Lambayeque – Perú  
Marzo – 2019



**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS**



Los firmantes, por la presente certifican que han leído y recomiendan a la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas la aceptación de la tesis titulada “Deformaciones de estructuras complejas en variedades complejas compactas”, presentado por el Bach.Mat. Yuliana Villarreal Montenegro, en el cumplimiento parcial de los requisitos necesarios para la obtención del título profesional de Licenciado en Matemáticas

---

Lic.Mat. Manuel Augencio Sandoval Rodríguez  
Presidente del Jurado

---

Lic.Mat. Wilmer Coronado Juárez  
Secretario del Jurado

---

M.Sc. José Antonio Chiroque Baldera  
Vocal del Jurado

Fecha de defensa Marzo – 2019



**UNIVERSIDAD NACIONAL PEDRO RUIZ GALLO**  
**FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS**  
**ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICAS**

---



TESIS:

**DEFORMACIONES DE ESTRUCTURAS COMPLEJAS EN  
VARIEDADES COMPLEJAS COMPACTAS**

---

Bach.Mat. Yuliana Villarreal Montenegro  
Autora de la tesis

---

M.Sc. Oscar A. Santamaria Santisteban  
Asesor

Fecha de defensa Marzo – 2019

# *Dedicatoria*

Dedico éste trabajo a mis padres Alejandro y Alicia;  
por su infinito amor, aliento y comprensión.  
A mi maestro de la vida, Daisaku Ikeda:

*En la vida, todos podemos tropezar y caer.  
Sólo basta ponerse de pie  
y con la frente en alto seguir marchando.  
¡En la juventud, no existe fracaso que no se pueda remediar!  
Daisaku Ikeda.*

# Agradecimiento

Agradezco a la vida por darme la oportunidad de escoger una profesión que demanda esfuerzo, dedicación y hacer lo mejor posible.

Por permitirme trabajar un tema que surgió a raíz de los proyectos de investigación que he realizado durante mis estudios de Maestría en Matemática:

- “Dos-Webs Algebraico y la Conjetura del Jacobiano”
- “Automorfismos y Webs de Foliaciones Holomorfas”

*Deformaciones de estructuras complejas* es un tema difícil, con poca bibliografía y bastante matemática de nivel, fue un gran reto que despertó mi interés, aprendí y me desarrollé un poquito más en matemáticas.

Agradezco también al profesor Oscar Santamaria, por aceptar ser mi asesor y brindarme todo su apoyo en presentar dicho trabajo, y poder obtener mi título profesional de *Licenciado en Matemática*.

Finalmente agradezco a mi organización Soka Gakkai Internacional de Perú, que me enseña a ver las vicisitudes de la vida, siempre desde una perspectiva positiva, llena de esperanza y con mucha gratitud, porque he aprendido a nunca rendirme y lograr mis objetivos, cueste lo que me cueste, y tarde lo que me tarde, por eso con orgullo puedo decir ¡lo conseguí! ...y es solo el comienzo.

# Resumen

En este trabajo se describe una parte importante de los descubrimientos obtenidos durante el siglo XX, es una introducción a la teoría de variedades complejas y sus deformaciones. Intuitivamente la deformación de una variedad compleja compacta  $M$ , compuesta de un número finito de cartas coordenadas, viene dada por el desplazamiento de estas cartas.

Definimos  $\mathcal{M} := \{M_t : t \in B\}$  y  $\varpi : \mathcal{M} \rightarrow B$  de manera que el desplazamiento del cual hablo se llevará a cabo a través de la aplicación  $\mathcal{KS}_t$  que va del espacio tangente de una variedad compleja  $B$ , denominado espacio base de una familia diferenciable de variedades complejas compactas  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ , al primer grupo de cohomología de  $M_t$ , es decir  $\mathcal{KS}_t : T_t(B) \rightarrow H^1(M_t, \Theta_t)$ , donde  $\Theta$  es el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre  $M_t$ , a ésta aplicación se le llama La Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer, que nos permitirá medir las variaciones de primer orden de la estructura compleja.

En consecuencia, dada  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja de variedades complejas compactas, se tiene que las deformaciones infinitesimales  $\Theta = dM_t/dt$  de  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  son ciertos elementos de  $H^1(M_t, \Theta_t)$ . Por otro lado, dada una variedad compleja compacta  $M$ , si  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  con  $0 \subset B \subset \mathbb{C}$  es una familia analítica compleja tal que  $M = \varpi^{-1}(0)$ . ¿Podemos decir que  $(dM_t/dt) \in H^1(M, \Theta)$  es una deformación infinitesimal de  $M$ ?

Pues no está claro que cada  $\theta$  deba surgir de esta manera. Resulta que si  $\theta$  surgiese así, entonces tiene que cumplir con ciertas condiciones adicionales. Si existen clases de cohomología  $\theta$  que no cumplan las condiciones adicionales, entonces  $\theta$  no son deformaciones infinitesimales de  $M$ , si no, son llamados Obstrucciones a la deformación de  $M$ . Esta teoría de la obstrucción, garantiza la existencia de una familia analítica compleja para cualquier  $H^1(M, \Theta)$ .

Finalmente, hablaremos también del Número de Moduli,  $m(M)$  que viene a ser el número de parámetros efectivos de la familia analítica compleja  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  con  $M = \varpi^{-1}(0)$ , que contiene todas las deformaciones suficientemente pequeñas para  $M$ .

# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>IV</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Funciones Holomorfas en $\mathbb{C}^n$ . . . . .	1
1.1.1. Variedad Diferenciable . . . . .	3
1.2. Variedades Complejas . . . . .	4
1.2.1. Funciones y Aplicaciones holomorfas . . . . .	7
1.2.2. Subvariedades y Conjuntos analíticos . . . . .	10
1.2.3. Variedad Compleja compacta . . . . .	13
1.3. Formas Diferenciales . . . . .	14
1.3.1. Producto exterior . . . . .	16
1.3.2. Suma directa . . . . .	18
1.3.3. La Complexificación del Espacio Tangente . . . . .	18
1.4. Fibrados Vectoriales . . . . .	20
1.4.1. Secciones de un Fibrado . . . . .	22
1.4.2. Morfismos de fibrados . . . . .	24
<b>2. Deformaciones de Estructuras Complejas</b>	<b>26</b>
2.1. Familia Analítica Compleja de Variedades Complejas Compactas	26
2.1.1. Automorfismos y Espacio Cociente . . . . .	35
2.1.2. Automorfismo en variedades complejas. . . . .	36
2.2. Ejemplos de Deformaciones . . . . .	37
2.2.1. El Toro Complejo . . . . .	40
2.2.2. Curvas Elípticas . . . . .	41
2.2.3. Superficie de Hopf . . . . .	44
2.2.4. Superficie de Hirzebruch . . . . .	48
<b>Conclusiones</b>	<b>54</b>
<b>Sugerencias</b>	<b>55</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>56</b>

# Introducción

En este trabajo se describe una parte importante de los descubrimientos obtenidos durante el siglo XX, es una introducción a la teoría de variedades complejas y sus deformaciones. El término deformación se refiere a pequeñas perturbaciones de una estructura matemática específica, en áreas como análisis, álgebra y geometría algebraica. Por ejemplo, se puede hablar sobre teoría de deformación en variedades complejas, en álgebras asociativas, en esquemas, en representaciones, y muchas más. La cuestión radica en que los resultados de cada una de estas teorías son probados usando herramientas completamente distintas, desde familias de operadores diferenciales elípticos para la deformación en estructuras de variedad compleja ([15]) hasta topos anillados ([11]).

La teoría de deformaciones de estructuras complejas de variedades Riemannianas, es una idea que se remonta hasta el mismo Riemann, donde en un trabajo de 1857 ([17]) calculó el número de parámetros independientes del cual depende las variaciones de una superficie de Riemann compleja compacta (dimensión compleja igual a uno). Llamó a estos parámetros “moduli”. La fórmula de Riemann declara que el número de moduli de una superficie de Riemann compacta de género  $g \geq 2$  es igual a  $3g - 3$ . Ésta fórmula fue generalizada por Klein para superficies de Riemann con borde. Desde esa publicación el interés en las deformaciones de estas estructuras nunca se ha perdido.

Con respecto a variedades de dimensiones mayores, las deformaciones de superficies algebraicas fueron tratados por primera vez en 1888 por Max Noether ([16]). Sin embargo las teorías de deformación de variedades complejas de dimensiones superiores no han sido tratadas si no 100 años después.

En 1957 (100 años después del trabajo de Riemann) Frölicher y Nijenhuis ([5]) publicaron un trabajo en el que estudian deformaciones de variedades complejas de dimensiones superiores mediante métodos de geometría diferencial obteniendo importantes resultados. Inspirados por este trabajo Kodaira y Spencer concibieron una teoría moderna de deformaciones de variedades complejas compactas, herramienta importante y la base de un gran cuerpo de la investigación posterior. El desarrollo de la teoría de Kodaira-Spencer, como se llama ahora, tuvo lugar durante la mitad y fines del decenio de 1950, ha tenido y sigue teniendo enorme influencia en amplios sectores de la Matemática, incluyendo la Teoría de Varias Variables Complejas, Geometría Diferencial, Geometría Algebraica, la Matemática y la Física. Pero esta teoría es local y algunas de las preguntas que trata la teoría de Kodaira-Spencer pueden ser ¿Existen deformaciones de una variedad compleja  $M$ ?, ¿Qué propiedades de  $M$  son estables bajo deformación?, ¿Cómo se comporta el grupo de cohomolo-



gía  $H^q(M_t, \Theta_t)$  en la familia diferenciable de variedades complejas? Pues bien, veamos una idea general de esta teoría de la cual hablará un poco el presente trabajo ([15]):

Intuitivamente la deformación de una variedad compleja compacta  $M$ , compuesta de un número finito de cartas coordenadas, viene dada por el desplazamiento de estas cartas. Definimos  $\mathcal{M} = \{M_t : t \in B\}$  y a  $\varpi : \mathcal{M} \rightarrow B$  de manera que el desplazamiento del cual hablamos se llevará acabo a través de la aplicación  $\mathcal{KS}_t$  que va del espacio tangente de una variedad compleja  $B$ , denominada espacio base de una familia diferenciable de variedades complejas compactas  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$ , al primer grupo de cohomología de  $M$ , es decir  $\mathcal{KS}_t : T_t(B) \rightarrow H^1(M_t, \Theta_t)$ , a esta aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal se le llama Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer, la que nos permitirá medir las variaciones de primer orden de la estructura compleja. Esta aplicación nos da un importante resultado, de que la familia diferenciable es localmente trivial si y sólo si la aplicación de Kodaira-Spencer es idénticamente nula, es decir  $\mathcal{KS}_t = 0$ .

Otro resultado muy importante concerniente a  $\mathcal{KS}_t$  es que da (en sentido práctico) la obstrucción a levantar  $\frac{\partial}{\partial t}$  sobre la base de un campo vectorial holomorfo definido sobre  $\mathcal{M}$ . Es decir, si  $\frac{\partial}{\partial t}$  se levanta a un campo holomorfo  $v$  con  $\varpi_*(v) = \frac{\partial}{\partial t}$ , entonces el flujo holomorfo de  $v$  da un isomorfismo (holomorfo)  $M_{t_0} \cong M_t$  y por lo tanto trivialización  $\mathcal{M} \cong M_{t_0} \times B$ . Ahora como puede ser visto usando particiones de la unidad, no hay obstrucción a levantar  $\frac{\partial}{\partial t}$  como campo vectorial  $C^\infty$ , luego el difeomorfismo resultante  $(M_{t_0} \cong M_t)$ , puede ser usado para transportar la estructura compleja de  $M_t$  de vuelta en  $M_{t_0}$ .

Un análisis minucioso, afirma que se puede expresar el operador de Cauchy-Riemann  $\bar{\partial}_t$  para  $M_t$  como  $\bar{\partial}_t = \bar{\partial} + \theta(t)$  donde  $\theta(t)$  es una (0-1)-forma a valores en el haz de gérmenes de campos vectoriales holomorfos sobre  $M_t$ , el haz es denotado como  $\Theta_t$ , tal que  $\theta(t) = \theta_1 t + \theta_2 t^2 + \dots$  es una serie convergente en  $t$ . Luego la condición de integrabilidad  $\bar{\partial}_t^2 = 0$  nos da una serie de relaciones que en conjunto son equivalentes entre sí, seguidamente usamos el isomorfismo de Dolbeault  $H^1(M_t, \Theta_t) \cong H_{\bar{\partial}_t}^{0,1}(M_t, \Theta_t)$  obteniéndose  $\mathcal{KS}_t(\frac{\partial}{\partial t}) = \{\theta(t)\}$ . Mostrándose cómo la clase de Kodaira-Spencer dan la variación de variedades complejas.

Para terminar cabe aclarar que esta teoría fue asimilada es diversas teorías de deformaciones incluyendo subgrupos discretos de grupos de Lie semi-simples (Calabi, Weil, Matsushima, entre otros) y álgebras (Gerstenhaber), a lo largo de los años estas teorías fueron extendidas, expandidas y aplicadas.

En el área de geometría algebraica, la teoría de Kodaira-Spencer fue rápidamente absorbida, adaptada y muy extendida por Grothendieck y su escuela. Junto al estudio complementario de moduli global, especialmente de curvas algebraicas iniciadas por Mumford, uno ve que casi 50 años luego, la teoría de deformación (local y global) es absolutamente central en la geometría algebraica moderna. Inclusive en otras áreas como teoría de cuerdas (cohomología cuántica) y los trabajos en variedades de Calabi-Yau.

En síntesis, este trabajo se concentra en la teoría de deformaciones infinitesimales de estructuras de variedades complejas. Para su estudio, introduciremos al lector en algunos ejemplos de deformaciones, donde se observará que las

fibras de las estructuras complejas son  $C^\infty$  equivalentes, pero analíticamente son distintas, luego presentaremos la Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer,  $\mathcal{KS}_t$ , y probaremos que si la aplicación  $\mathcal{KS}_t$  es idénticamente nula, entonces la familia  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  es localmente trivial (o constante), esto es, la aplicación de Kodaira-Spencer mide la variación de las estructuras analíticas complejas.

# Capítulo 1

## Preliminares

*El conocimiento es luz y la ignorancia es oscuridad.  
¡Cuán maravilloso es aquel que mantiene vivo el afán de saber!  
Daisaku Ikeda.*

### 1.1. Funciones Holomorfas en $\mathbb{C}^n$

El dominio de las funciones de varias variables complejas está contenido en el espacio vectorial complejo  $n$ -dimensional  $\mathbb{C}^n$ , definido como el producto cartesiano  $\underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}}$  y se puede identificar con el espacio euclideo  $\mathbb{R}^{2n}$ , de dimensión  $2n$ . Es decir,

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n\text{-veces}} = \{(z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\},$$

de este modo, cada coordenada  $z_j$  de  $z = (z_1, \dots, z_n)$  se escribe  $z_j = x_j + iy_j$ , donde  $x_j$  e  $y_j$  son números reales e  $i$  la raíz cuadrada de  $-1$ .

**Definición 1.1.** Una función  $f$  con valores complejos y definida sobre un abierto  $D \subseteq \mathbb{C}^n$  es holomorfa en  $D$ , si cada punto  $A = (a_1, \dots, a_n) \in D$  tiene una vecindad abierta  $U$  donde la función  $f$  posee una expansión en serie de potencias

$$f(z) = \sum_{j_1, \dots, j_n=0}^{\infty} c_{j_1, \dots, j_n} (z_1 - a_1)^{j_1} \cdots (z_n - a_n)^{j_n}, \quad (1.1)$$

la cual converge para todo  $z = (z_1, \dots, z_n) \in U$ . En general,  $g = (g_1, \dots, g_m)$  es holomorfa en  $D$  cuando cada  $g_i$  satisface (1.1), en  $D$ . Una biyección holomorfa con inversa holomorfa entre abiertos de  $\mathbb{C}^n$  se llama biholomorfismo.

Si  $J = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$  y  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  se define  $z^J = z_1^{j_1} \cdots z_n^{j_n}$  y así  $f$  se puede escribir como

$$f(z) = \sum_J c_J (z - A)^J.$$

**Observación 1.1.1.** *La composición de dos funciones holomorfas también es holomorfa.*

Con frecuencia, usamos la norma Euclidiana  $\|z\|$  y la norma del máximo  $|z|$  definido como sigue:

$$\|z\|^2 := \sum z_j \bar{z}_j \quad \text{y} \quad |z| := \max_{1 \leq j \leq n} |z_j|.$$

Un **polidisco abierto** en  $\mathbb{C}^n$  es el producto cartesiano de  $n$  discos abiertos y toma la forma

$$\begin{aligned} \Delta(A; R) &= \Delta(a_1, \dots, a_n; r_1, \dots, r_n) \\ &= \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j - a_j| < r_j \text{ para } 1 \leq j \leq n\}, \end{aligned}$$

donde el punto  $A = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$  es llamado el **centro** del polidisco, y el punto  $R = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$  es llamado su **poliradio**.

Para la demostración de la siguiente proposición vea [12]

**Proposición 1.1.** *Si  $f = (f_1, \dots, f_m)$  está definida en  $D \subset \mathbb{C}^n$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- (a)  *$f$  es holomorfa en  $D$ .*
- (b) *Las funciones coordenadas  $f_i : D \rightarrow \mathbb{C}$  son holomorfas.*
- (c) *Las  $f_i : D \rightarrow \mathbb{C}$  son localmente limitadas y por cada  $1 \leq j \leq n$ ,*

$$z_j \rightarrow f_i(z_1, \dots, z_j, \dots, z_n)$$

*es holomorfa en  $\mathbb{C}$ .*

Para el caso 1-dimensional, una función continua  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  es holomorfa si satisface alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- (i)  $f$  es derivable: existe la derivada compleja  $\frac{df}{dz}$  y coincide con

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right),$$

donde  $\frac{\partial f}{\partial x}$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}$  son las derivadas parciales usuales.

- (ii)  $f$  es analítica: localmente,  $f$  se representa por una serie de potencias.
- (iii) Teorema de Cauchy: para cada curva cerrada  $\gamma \in D$ , contractible y suave por tramos la integral

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- (iv) Cauchy-Riemann: las derivadas parciales son continuas en cada punto de  $D$ , y satisfacen

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0.$$

### 1.1.1. Variedad Diferenciable

Un espacio Hausdorff,<sup>1</sup> digamos  $\Sigma$ , es llamado variedad topológica cuando admite un cubrimiento abierto, a lo más numerable y formado por dominios  $U_1, \dots, U_j, \dots$ , donde cada  $U_j$  es homeomorfo a un dominio  $\mathfrak{U}_j \subset \mathbb{R}^m$ . Cada homeomorfismo de  $U_j$  en  $\mathfrak{U}_j$ :

$$x_j : p \mapsto x_j(p) = (x_j^1(p), \dots, x_j^m(p))$$

define las coordenadas locales. Luego la colección  $\{x_j\} = \{x_1, \dots, x_j, \dots\}$  es llamado **sistema de coordenadas locales** sobre la variedad topológica  $\Sigma$ . Para cada  $j, k$  tal que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ ,

$$\tau_{jk} : x_k(p) \mapsto x_j(p), \quad p \in U_j \cap U_k,$$

es un homeomorfismo del conjunto abierto  $\mathfrak{U}_{kj} = \{x_k(p) : p \in U_k \cap U_j\} \subset \mathfrak{U}_k$  en el conjunto abierto  $\mathfrak{U}_{jk} = \{x_j(p) : p \in U_j \cap U_k\} \subset \mathfrak{U}_j$ . Llamamos  $\{x_j\}$  un sistema de coordenadas locales  $C^\infty$  si éstos  $\tau_{jk}$  son también  $C^\infty$ , lo que significa que  $x_j^1(p), \dots, x_j^m(p)$  son funciones  $C^\infty$  de  $x_k^1(p), \dots, x_k^m(p)$ . Suponga dado dos sistemas de coordenadas locales  $C^\infty$ ,  $\{x_j\}$  y  $\{\mu_\lambda\}$  en  $\Sigma$ , y sea  $U_j$  el dominio de  $x_j$  y  $W_\lambda$  el dominio de  $\mu_\lambda$ . Si para cada par  $j, \lambda$  con  $U_j \cap W_\lambda \neq \emptyset$ , las aplicaciones

$$x_j(p) \mapsto \mu_\lambda \quad \text{y} \quad \mu_\lambda \mapsto x_j(p)$$

son ambas  $C^\infty$  para  $p \in U_j \cap W_\lambda$ , se dice que  $\{x_j\}$  y  $\{\mu_\lambda\}$  son  $C^\infty$  **equivalentes**. Esta propiedad define una relación de equivalencia y las clases conforman las **estructuras diferenciables** de la variedad topológica.

**Definición 1.2** (Variedad Diferenciable). *Una variedad topológica, dotada con una estructura diferenciable es llamada una variedad diferenciable*

**Ejemplo 1.1.** Sea  $S^1 = \{(\cos r, \sin r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$ . Considere

$$U = \{(\cos s, \sin s) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < s < \pi\}$$

y

$$V = \{(\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < 2\pi\}.$$

Sean  $x, y$  dos funciones de  $S^1$  en  $\mathbb{R}$  con dominios  $\text{Dom}(x) = U$ ,  $\text{Dom}(y) = V$  y defina por  $x(\cos s, \sin s) = s$ ,  $y(\cos t, \sin t) = t$ . El cambio de coordenadas viene dado por

$$yx^{-1} = \begin{cases} 2\pi + s & -\pi < s < 0 \\ s & 0 < s < \pi \end{cases}$$

que es una función  $C^\infty$ . Entonces el atlas  $\{x, y\}$  dota a  $S^1$  de una estructura de variedad diferenciable 1-dimensional.

---

<sup>1</sup> $\Sigma$  es Hausdorff si dados dos puntos distintos  $p, q \in \Sigma$  existen abiertos disjuntos  $U, V$  tal que  $p \in U, q \in V$ .

La diferenciabilidad de una aplicación que va de un dominio  $D \subset \Sigma$  en otra variedad diferenciable, es definida como sigue: Sea  $N$  una variedad diferenciable de dimensión  $n$ ,  $\{u_\lambda\}$  un sistema de coordenadas locales  $C^\infty$  en  $N$ ,  $W_\lambda$  el dominio de  $u_\lambda$ , y  $\phi : p \mapsto q = \phi(p)$  una aplicación continua de  $D$  a  $N$ , entonces para  $\lambda, j$  con  $\phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \neq \emptyset$ , la aplicación

$$\phi_{\lambda j} : x_j(p) \mapsto u_\lambda(\phi(p)), \quad p \in \phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j$$

es una aplicación diferenciable del abierto  $\mathfrak{U}_{j\lambda} = x_j(\phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j) \subset \mathbb{R}^m$  en el dominio  $W_\lambda = u_\lambda(W_\lambda)$ .

## 1.2. Variedades Complejas

La variedad compleja es una generalización de superficie de Riemann. En una superficie de Riemann, la coordenada compleja local de un punto  $p \in M$  es un número complejo, pero si en lugar de un número complejo se usa un conjunto ordenado de  $n \in \mathbb{N}$  números complejos  $z_j(p) = (z_1(p), \dots, z_n(p))$  se obtiene el concepto de variedad compleja  $n$ -dimensional. Más precisamente, cada variedad compleja está definida en  $M$ , un espacio de Hausdorff conexo, que admite una familia numerable de subconjuntos abiertos  $\{U_1, \dots, U_j, \dots\}$  cuya unión la contiene. En cada elemento de este cubrimiento abierto de  $M$  está definido un homeomorfismo

$$z_j : p \mapsto z_j(p) = (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)), \quad p \in U_j$$

el cual aplica  $U_j \subset M$  en un dominio<sup>2</sup>  $\mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$ . Es decir, el par  $(U_j, z_j)$  es una **carta compleja** para  $M$ . De este modo, la familia de cartas  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \dots\}$  es un **atlas analítico** de  $M \subset \bigcup_j U_j$  si las cartas son compatibles dos a dos, donde **compatible** significa que cuando los dominios de las cartas  $(U_j, z_j)$  y  $(U_k, z_k)$  se intersectan  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , la aplicación  $\tau_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$ , dada por

$$\tau_{jk} : z_k(p) \mapsto z_j(p) \quad p \in U_j \cap U_k \tag{1.2}$$

induce un biholomorfismo entre los abiertos  $\mathfrak{U}_{kj} = z_k(U_j \cap U_k) \subset \mathfrak{U}_k$  y  $\mathfrak{U}_{jk} = z_j(U_j \cap U_k) \subset \mathfrak{U}_j$  de  $\mathbb{C}^n$ . En particular, todas las cartas de un atlas analítico han de tener imagen en abiertos de  $\mathbb{C}^n$  para un mismo  $n$  (pues si  $m \neq n$  los abiertos de  $\mathbb{C}^n$  no son biholomórficamente equivalentes a los de  $\mathbb{C}^m$ ). Por otro lado, es fácil ver que si a un atlas analítico se añaden todas las cartas compatibles con sus elementos, obtenemos de nuevo un atlas (es decir, las cartas añadidas no sólo son compatibles con las del atlas dado, sino también entre sí). El atlas así obtenido es llamado **atlas analítico maximal**, en el sentido de que no está contenido en otro atlas mayor y además se dice que  $z_j : U_j \mapsto \mathfrak{U}_j$  define las coordenadas  $(z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \in \mathbb{C}^n$  de  $p \in U_j$ ; de este modo la colección  $\{z_1, \dots, z_j, \dots\}$  es un **sistema de coordenadas locales** para  $M$ .

---

<sup>2</sup>Un subconjunto  $D \subset \mathbb{C}^n$  es un dominio en  $\mathbb{C}^n$  si  $D$  es considerado un dominio como subconjunto de  $\mathbb{R}^{2n}$ , es decir un conjunto abierto conexo no vacío.

**Definición 1.3** (Variedad Compleja). *Un espacio de Hausdorff, conexo y con base numerable es llamado una variedad compleja de dimensión  $n$ , si admite un atlas analítico maximal  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \dots\}$ , también llamado la estructura compleja de la variedad.*

Observe que, una variedad compleja es una variedad con alguna estructura compleja.

**Ejemplo 1.2.** *Cualquier abierto conexo no vacío,  $\mathfrak{U} \subset \mathbb{C}^n$  es una variedad compleja de dimensión  $n$ . Consideramos  $M = \mathfrak{U}$  y su sistema coordenado la identidad  $\{z\}$  es decir  $z \mapsto z = (z^1, \dots, z^n)$ .*

Cada  $p \in U_j$  es determinado únicamente por sus coordenadas locales  $z_j = z_j(p)$ , por eso  $z_j$  permite indentificar  $U_j$  con  $\mathfrak{U}_j$  y en consecuencia la variedad compleja  $M$  se obtiene al pegar los dominios  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_j, \dots$  en  $\mathbb{C}^n$  via el isomorfismo

$$\tau_{jk} : \mathfrak{U}_{kj} \rightarrow \mathfrak{U}_{jk}.$$

Por lo tanto,  $M \equiv \bigcup_j \mathfrak{U}_j$ , donde

$$z_j \in \mathfrak{U}_j \text{ y } z_k \in \mathfrak{U}_k \text{ son el mismo punto en } M \Leftrightarrow z_j = \tau_{jk}(z_k) \quad (1.3)$$

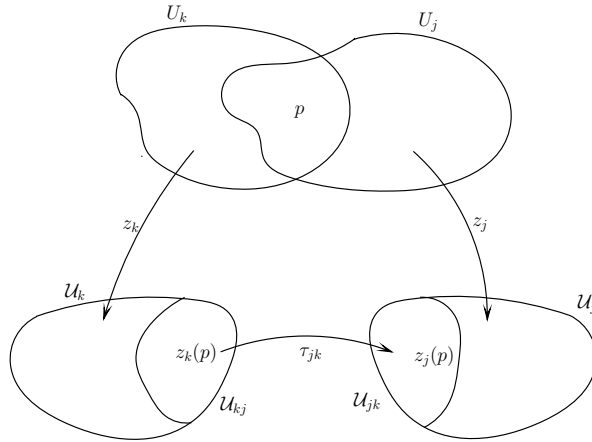


Figura 1.1:

En el siguiente ejemplo vemos como una variedad compleja de dimensión  $n$ , induce una variedad diferenciable con cartas en  $\mathbb{R}^{2n}$ , en el sentido de la Definición 1.2.

**Ejemplo 1.3.** *Sea  $z_j = (z_j^1, \dots, z_j^n)$  una carta para la variedad compleja  $M$ ,*

$$z_j : U_j \subset M \rightarrow \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n.$$

Si por cada  $\alpha = 1, \dots, n$  se escribe  $z_j^\alpha = x_j^{2\alpha-1} + ix_j^{2\alpha}$ , entonces la igualdad  $x_j = (x_j^1, \dots, x_j^{2n})$  definen cartas reales

$$x_j : U_j \subset M \rightarrow \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{R}^{2n}.$$

Por lo tanto,  $\{x_j\}$  genera una estructura  $C^\infty$  que hace de  $M$  una variedad diferenciable.

**Ejemplo 1.4** (El espacio proyectivo). Para  $(\zeta_0, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus (0, \dots, 0)$ ,

$$[\zeta_0, \dots, \zeta_n] = \{(\lambda\zeta_0, \dots, \lambda\zeta_n) | \lambda \in \mathbb{C}\}$$

es una línea compleja alrededor de cero. La colección de las líneas complejas alrededor de cero,

$$\mathbb{P}^n = \{\zeta = [\zeta_0, \dots, \zeta_n] | (\zeta_0, \dots, \zeta_n) \neq (0, \dots, 0)\}$$

es el **espacio proyectivo complejo  $n$ -dimensional** y  $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$  es llamado las coordenada homogéneas de  $[\zeta_0, \dots, \zeta_n] \in \mathbb{P}^n$ . Al espacio proyectivo complejo 1-dimensional  $\mathbb{P}^1$  se le conoce también como la **esfera de Riemann**.

La igualdad  $[\zeta'_0, \dots, \zeta'_n] = [\zeta_0, \dots, \zeta_n]$  dice que  $(\zeta'_0, \dots, \zeta'_n)$  y  $(\zeta_0, \dots, \zeta_n)$  son coordenadas homogéneas del mismo punto  $\zeta \in \mathbb{P}^n$ , esto es

$$\zeta'_0 = \lambda\zeta_0, \dots, \zeta'_n = \lambda\zeta_n \text{ para algún } \lambda \neq 0.$$

Por otro lado, en el abierto

$$U_j = \{\zeta \in \mathbb{P}^n : \zeta_j \neq 0\},$$

cada elemento  $\zeta \in U_j$  es representado como

$$\zeta = [z^1, \dots, z^{j-1}, 1, z^{j+1}, \dots, z^n], \quad \text{donde} \quad z^\nu = \zeta_\nu / \zeta_j.$$

Esto genera  $(z^1, \dots, z^n)$ , las coordenadas no homogéneas de  $\zeta$  y define

$$z_j : \zeta \longrightarrow z_j(\zeta) = (z_j^0, \dots, z_j^{j-1}, z_j^{j+1}, \dots, z_j^n), \text{ con } z_j^\nu = \zeta_\nu / \zeta_j.$$

Por lo tanto, las imágenes  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$  son abiertos de  $\mathbb{C}^n$  y la colección  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) | j = 0, 1, \dots, n\}$  es un atlas analítico para el espacio proyectivo, ya que en la intersección  $U_j \cap U_k$ , se cumple

$$z_j^k = 1/z_k^j, \quad z_j^\nu = z_k^\nu / z_k^j, \quad \nu \neq j, \nu \neq k \quad (1.4)$$

y las transformaciones coordenadas

$$\tau_{jk} : z_k \longrightarrow z_j$$

son biholmorfas. En consecuencia,  $\mathbb{P}^n$  es una variedad compleja, obtenida por pegar  $(n+1)$ -copias de  $\mathbb{C}^n$  via el isomorfismo (1.4).

En éste ejemplo se puede verificar que la familia de sistemas coordenados es un espacio de Hausdorff que no tiene base numerable (para probar ello debe verificar que  $\mathcal{A} = \{f_j : U_j \rightarrow M, j \in J\}$  es un cubrimiento para  $M$  y sus cambios de coordenadas son  $C^r$  holomorfas, así  $\mathcal{B} = \{f_j(V) : V \subset U_j, j \in J\}$  es una base topológica de  $M$ , siendo para éste ejemplo  $\mathcal{B}$  no numerable).



### 1.2.1. Funciones y Aplicaciones holomorfas

Sea  $M$  una variedad compleja  $n$ -dimensional,  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \dots\}$  su atlas analítico maximal y  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$ , dominios de  $\mathbb{C}^n$ . Sea

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}$$

una función definida sobre un dominio  $D \subset M$ . Si  $\mathfrak{D}_j = z_j(D \cap U_j) \subset \mathfrak{U}_j$ , el conjunto formado por las coordenadas, se define la función  $f_j : \mathfrak{D}_j \rightarrow \mathbb{C}$

$$f_j = f \circ (z_j)^{-1},$$

de este modo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} D \cap U_j & & \\ \downarrow z_j & \searrow f & \\ \mathfrak{D}_j \subset \mathfrak{U}_j & \xrightarrow{f_j} & \mathbb{C} \end{array}$$

es conmutativo. Observe que si, para  $p \in D \cap U_j$  se identifica  $z_j = z_j(p)$ , la función  $f_j(z_j)$  satisface

$$f_j(z_j) = f(p), \quad \text{con} \quad z_j = z_j(p). \quad (1.5)$$

Por lo tanto,  $f_j(z_j)$  es una función de  $n$  variables complejas  $(z_1, \dots, z_n)$  definidas en  $\mathfrak{D}_j$ . Por otro lado, si  $z_j = \tau_{jk}(z_k)$ , con  $\tau_{jk}$  dado en (1.2), entonces

$$f_j(z_j) = f_k(z_k).$$

De este modo  $f$  es continua en  $D$  si y sólo si cada  $f_j(z_j)$  es continua en  $\mathfrak{D}_j$ , pues  $p \mapsto z_j = z_j(p)$  es un homeomorfismo. Ésta notación nos permite definir.

**Definición 1.4** (Función Holomorfa). *Sea  $D$  dominio de  $M$  una variedad compleja,  $z_j : U_j \rightarrow \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$  una carta de  $M$  y  $f_j : \mathfrak{U}_j \rightarrow \mathbb{C}$  una función de  $n$  variables complejas. Se dice que  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  – bajo la notación anterior  $f(p) = f_j(z_j)$ , para  $p \in D \cap U_j$  – es una función holomorfa si y sólo si cada  $f_j(z_j)$  es holomorfa, con respecto a  $z_j$ .*

Las cartas locales de una variedad compleja generan ejemplos de funciones holomorfas, por medio de las proyecciones.

**Observación 1.2.1.** *Un sistema de coordenadas complejas locales  $\{z_j\}$  sobre el espacio Hausdorff genera una estructura diferenciable si y sólo si cada  $z_j$  aplica su dominio  $U_j$  difeomórficamente en  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ .*

Sea  $\Phi : p \mapsto q = \Phi(p)$  una aplicación continua de un dominio  $D \subset M$  en  $N$ , donde  $M$  y  $N$  son variedades complejas. Es decir, cada una admite

un atlas analítico maximal, digamos  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \dots\}$  para  $M$  y  $\mathcal{B} = \{(W_\lambda, w_\lambda) : \lambda = 1, 2, \dots\}$  para  $N$ . Por cada par  $\lambda, j$  con la intersección

$$\Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \neq \emptyset,$$

la aplicación

$$\Phi_{\lambda j} : z_j(p) \mapsto w_\lambda(q), \quad q = \Phi(p), \quad p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j \quad (1.6)$$

es continua y envía el dominio

$$\mathfrak{U}_{j\lambda} = \{z_j(p) / p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j\} \subset \mathbb{C}^n$$

en  $w_\lambda(W_\lambda) \subset \mathbb{C}^m$ . En otras palabras,  $\Phi_{\lambda j} = w_\lambda \circ \Phi \circ z_j^{-1}$  hace del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j & \xrightarrow{\Phi} & W_\lambda \\ \downarrow z_j & & \downarrow w_\lambda \\ \mathfrak{U}_{j\lambda} & \xrightarrow{\Phi_{\lambda j}} & w_\lambda(W_\lambda) \end{array}$$

conmutativo.

**Observación 1.2.2.** Si  $M = \bigcup_j \mathfrak{U}_j$  y  $N = \bigcup_\lambda \mathcal{W}_\lambda$ , con  $\mathcal{W}_\lambda = w_\lambda(W_\lambda)$  la aplicación  $\Phi$  del dominio  $D \subset M$  en  $N$  también se escribe

$$\Phi : z_j \mapsto w_\lambda = \Phi(z_j).$$

Por tanto, se puede prescindir de los índices  $j, \lambda$  en  $\Phi_{\lambda j}$  ya que  $w_\lambda = \Phi_{\lambda j}(z_j)$  (vea, (1.5)).

**Definición 1.5** (Aplicación Holomorfa).  $\Phi : M \rightarrow N$  es una aplicación holomorfa entre las variedades complejas  $M$  y  $N$ , si para cada  $p \in M$  y cada par de cartas  $z_j$  alrededor de  $p$  y  $w_\lambda$  alrededor  $\Phi(p)$ , se cumple que la función  $w_\lambda \circ \Phi \circ z_j^{-1}$  es holomorfa en su dominio.

Es fácil ver que para que  $\Phi$  sea una aplicación holomorfa basta con que cumpla la definición para un par de cartas  $z_j$  y  $w_\lambda$  alrededor de cada punto  $p$  y de su imagen (es decir, si lo cumple para dos dadas, lo cumple para dos cualesquiera). Por otra parte, todo abierto de una variedad compleja  $M$  hereda de forma natural una estructura compleja (formada por las restricciones de las cartas que cortan al abierto), por lo que podemos hablar de Aplicaciones holomorfas en un abierto de una variedad, y entonces una aplicación es holomorfa si y sólo si lo es en un entorno de cada punto.

**Definición 1.6** (Matriz Jacobiana). Dada la aplicación  $\Phi_{\lambda j}$  definida como antes,  $\Phi_{\lambda j} : z_j(p) \mapsto \Phi_{\lambda j}(z_j(p)) = w_\lambda(q)$  holomorfa, la matriz

$$\left( \frac{\partial w_\lambda^\nu}{\partial z_j^\mu} \right)_{\nu=1, \dots, m / \mu=1, \dots, n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial w_\lambda^1}{\partial z_j^1} & \cdots & \frac{\partial w_\lambda^1}{\partial z_j^n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial w_\lambda^m}{\partial z_j^1} & \cdots & \frac{\partial w_\lambda^m}{\partial z_j^n} \end{pmatrix}$$

es llamada Matriz Jacobiano de  $\Phi_{\lambda_j}$ , denotada por  $\partial(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^m)/\partial(z_j^1, \dots, z_j^n)$ . En particular si  $m = n$ , el determinante de la matriz Jacobiano de  $\Phi_{\lambda_j}$ :

$$J(z_j) = \det \frac{\partial(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^n)}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^n)}$$

es llamado el Jacobiano de  $\Phi_{\lambda_j}$ .

**Teorema 1.1.** *Suponga  $\Phi_{\lambda_j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa, y  $J(z_j)$  su Jacobiano. Si  $J(p^0) \neq 0$  en el punto  $p^0 = z_j(p) \in \mathfrak{U}_{j\lambda}$ , existe una vecindad  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{U}_{j\lambda}$  de  $p^0$ , y una vecindad  $\tilde{\mathcal{V}}$  de  $\Phi_{\lambda_j}(p^0)$ , tal que  $\Phi_{\lambda_j}$  aplica  $\mathcal{V}$  biyectivamente en  $\tilde{\mathcal{V}}$ . Es más, la inversa  $\Phi_{\lambda_j}^{-1}$  de  $\Phi_{\lambda_j}$  restricto a  $\mathcal{V}$  es holomorfa sobre  $\tilde{\mathcal{V}}$ .*

*Demostración.* Similar a prueba del teorema (1.19) en [13]. Esto es, considere  $\Phi_{\lambda_j}$  como una función de clase  $C^\infty$ . Como el jacobiano de  $\Phi_{\lambda_j}$  como función de clase  $C^\infty$  es igual a  $|J(p)|^2$  y, por hipótesis  $|J(p^0)| \neq 0$  entonces, por el teorema de la función inversa para funciones continuamente diferenciables, se concluye que existe una vecindad  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{U}_{j\lambda}$  de  $p^0$  en  $\mathfrak{U}_{j\lambda}$ , y una vecindad  $\tilde{\mathcal{V}}$  de  $\Phi_{\lambda_j}(p^0)$  tal que  $\Phi_{\lambda_j}$  aplica  $\mathcal{V} \subset \mathfrak{U}_{j\lambda}$  biyectivamente en  $\tilde{\mathcal{V}}$ , y que la inversa  $\Phi_{\lambda_j}^{-1}$  de  $\Phi_{\lambda_j}|_{\mathcal{V}}$  es también de clase  $C^\infty$ . Sea

$$\Phi_{\lambda_j}^{-1} : w \rightarrow (z_1, \dots, z_n) = (\psi_1(w), \dots, \psi_n(w)).$$

Entonces  $z_h = \psi_h(\varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z))$ . Como  $\partial\varphi/\partial\bar{z}_k = 0$ , tomando las derivadas parciales respecto a  $\bar{z}_k$  se obtiene

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial\bar{w}_j}{\partial z_j} \frac{\partial\psi_h(w)}{\partial\bar{w}_j}, \quad w_j = \varphi_j(z).$$

En consecuencia, como  $\det(\partial\bar{w}_j/\partial z_k)_{j,k=1,\dots,n} = \overline{J(z)} \neq 0$  sobre  $\mathcal{V}$ , se tiene  $\partial\psi_h(w)/\partial\bar{w}_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ , por tanto  $\psi_h(w)$  son holomorfos en  $w_1, \dots, w_n$ .  $\square$

**Observación 1.2.3.** *Consecuencias del teorema anterior:*

1. Dado  $\Phi_{\lambda_j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa. Si  $J(z_j(p))$  es distinto del vacío en el dominio  $\mathfrak{U}_{j\lambda} \subset \mathbb{C}^n$ ,  $\Phi_{\lambda_j}(\mathfrak{U}_{j\lambda})$  es un dominio en  $\mathbb{C}^n$ .
2. Dado  $\Phi_{\lambda_j} : \mathfrak{U}_{j\lambda} \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa inyectiva. Si  $J(z_j(p))$  es diferente del vacío en  $\mathfrak{U}_{j\lambda}$ , la inversa  $\Phi_{\lambda_j}^{-1}$  de  $\Phi_{\lambda_j}$  es una aplicación holomorfa del dominio  $\Phi_{\lambda_j}(\mathfrak{U}_{j\lambda})$  en  $\mathfrak{U}_{j\lambda}$ .

**Teorema 1.2.** *Sean  $f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^m(z_j)$  funciones holomorfas en un dominio  $\mathfrak{U}_{\lambda_j} \subset \mathbb{C}^n$  en  $\mathbb{C}$ . Suponga que*

$$\text{rango} \frac{\partial(f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^m(z_j))}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^n)} = \nu$$

es independiente del punto  $z_j(p)$ , para cualquier  $p \in \Phi^{-1}(W_\lambda) \cap U_j$ , que se tome. Si  $p^0$  es un punto en el dominio  $\mathfrak{U}_{\lambda_j}$  tal que

$$\det \frac{\partial(f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^\nu(z_j))}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^\nu)} \neq 0 \quad \text{en} \quad z_j(p) = p^0,$$

entonces existe una vecindad  $\mathcal{V}$  de  $p^0$  tal que  $f_{\lambda_j}^{\nu+1}(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^m(z_j)$  son funciones holomorfas de  $f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^\nu(z_j)$  en  $\mathcal{V}$ .

*Demostración.* Ponga  $w_1 = f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, w_\nu = f_{\lambda_j}^\nu(z_j)$ . Sobre una vecindad lo suficientemente pequeña  $\mathcal{V}$  de  $p^0$ ,

$$\det \frac{\partial(w_1, \dots, w_\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)} = \det \frac{\partial(w_1, \dots, w_\nu)}{\partial(z_j^1, \dots, z_j^\nu)} \neq 0.$$

Por lo tanto, del teorema (1.1),

$$\Phi_{\lambda_j} : (z_j^1, \dots, z_j^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n) \mapsto (w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)$$

es un biholomorfismo de  $\mathcal{V}$  en una vecindad  $\tilde{\mathcal{V}}$  de  $\Phi_{\lambda_j}(p^0) = q^0 = w_\lambda(q)$ . Sea

$$g_{\lambda_j} = g_{\lambda_j}(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n) = f_{\lambda_j}^\nu(\Phi_{\lambda_j}^{-1}(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)).$$

Así,  $g_{\lambda_j}^1, \dots, g_{\lambda_j}^m$  son funciones holomorfas de  $w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n$  en  $\mathcal{V}$ , y

$$\text{rango} \frac{\partial(g_{\lambda_j}^1, \dots, g_{\lambda_j}^m)}{\partial(w_\lambda^1, \dots, w_\lambda^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)} = \nu$$

Por lo tanto,  $g_{\lambda_j}^1 = w_{\lambda_j}^1, \dots, g_{\lambda_j}^\nu = w_{\lambda_j}^\nu$ , se tiene

$$\frac{\partial g_{\lambda_j}^{\nu+l}}{\partial z_j^{\nu+k}} = \det \frac{\partial(g_{\lambda_j}^1, \dots, g_{\lambda_j}^\nu, g_{\lambda_j}^{\nu+l})}{\partial(w_{\lambda_j}^1, \dots, w_{\lambda_j}^\nu, z_j^{\nu+k})} = 0, \quad l = 1, \dots, m - \nu, \quad k = 1, \dots, n - \nu.$$

Aquí los  $g_{\lambda_j}^{\nu+l}(w_{\lambda_j}^1, \dots, w_{\lambda_j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n)$  son funciones holomorfas de  $w_{\lambda_j}^1, \dots, w_{\lambda_j}^\nu$  y no dependen de  $z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n$ :

$$g_{\lambda_j}^{\nu+l}(w_{\lambda_j}^1, \dots, w_{\lambda_j}^\nu, z_j^{\nu+1}, \dots, z_j^n) = h_{\lambda_j}(w_{\lambda_j}^1, \dots, w_{\lambda_j}^\nu).$$

En consecuencia,

$$f_{\lambda_j}^{\nu+l}(z_j) = h_{\lambda_j}(f_{\lambda_j}^1(z_j), \dots, f_{\lambda_j}^\nu(z_j))$$

es holomorfa y se concluye así la demostración.  $\square$

### 1.2.2. Subvariedades y Conjuntos analíticos

Dos variedades complejas  $M$  y  $N$ , son **analíticamente equivalentes**, si existe una aplicación biholomorfa<sup>3</sup>  $\Phi : M \rightarrow N$ . En este caso,  $M$  y  $N$  se consideran como la misma variedad compleja, pues

<sup>3</sup>Una aplicación biholomorfa es una biyección holomorfa con inversa holomorfa

- $\Phi$  es un homeomorfismo, la identificación de  $p \in M$  y  $q = \Phi(p) \in N$  genera mismo espacio Hausdorff  $\Sigma$ .
- Cada  $\Phi_{\lambda_j}$ , definida en (1.6) es biholomorfismo y así  $z_j$  y  $w_\lambda$  son sistemas de coordenadas complejas locales compatibles en  $\Sigma$ .

**Definición 1.7** (Conjunto analítico). *Sea  $S$  un subconjunto cerrado de  $M^n$ , una variedad de dimensión  $n$ .  $S$  es un conjunto analítico en  $M$  si para cada  $q \in S$ , existe un número finito de funciones holomorfas  $f_q^1, \dots, f_q^\nu$ ;  $\nu = \nu(q)$ , definidas en una vecindad abierta  $U(q) \subset M^n$  de  $q$  tal que*

$$S \cap U(q) = \{p \in U(q) | f_q^1(p) = \dots = f_q^\nu(p) = 0\}.$$

Sea  $S$  un conjunto analítico de  $M^n$ . Localmente  $S$  satisface el siguiente sistema de ecuaciones analíticas

$$f_q^1(p) = \dots = f_q^\nu(p) = 0,$$

llamado también ecuación local de  $S$  en  $q$ . Hay infinidad de opciones de ecuaciones locales para un  $S$  dado.  $S$  es llamado **regular** en  $q$  si se puede escoger una ecuación local  $f_q^1(p) = \dots = f_q^\nu(p) = 0$  de  $S$  en  $q$  de manera que el

$$\text{rango} \frac{\partial(f_q^1(p), \dots, f_q^\nu(p))}{\partial(z_q^1(p), \dots, z_q^n(p))} = \nu, \quad p = q.$$

Siendo este el caso, llamamos  $n - \nu$  la dimensión de  $S$  en  $q$ . De lo contrario llamaremos a  $q \in S$  un **punto singular** de  $S$ .

**Definición 1.8** (Subvariedad Compleja). *Un subconjunto analítico conexo  $S$  de  $M^n$  sin puntos singulares es llamado una subvariedad compleja de  $M$ .*

Sea  $M^n$  una variedad compleja y suponga que para cada  $q \in M$ , se escoge un polidisco coordenado  $U_{R(q)}(q)$  con respecto a las coordenadas locales  $z_q : p \mapsto z_q(p)$  tal que  $U_{R(q)}(q) \cap S = \emptyset$  para  $q \notin S$  y que  $U_{R(q)} \subset U(q)$  para  $q \in S$ . Entonces se puede elegir a lo mas un numero finito de polidiscos coordenados,

$$U_j = U_{r(j)}(q_j) \subset U_{R(q)}(q_j), \quad j = 1, 2, 3, \dots,$$

tal que  $U = \{U_j : j = 1, 2, \dots\}$  es un cubrimiento abierto localmente finito de  $M$ . Por simplicidad escribimos  $z_j$  por  $z_{q_j}$ ,  $f_j^k(p)$  por  $f_{q_j}^k(p)$  y  $\nu_j$  por  $\nu(q_j)$ . Entonces o  $S \cap U_j = \emptyset$ , o  $q_j \in S$ , y si  $q_j \in S$ ,

$$S \cap U_j = \{p \in U_j : f_j^1(p) = \dots = f_j^{\nu_j}(p) = 0\}. \quad (1.7)$$

En particular si  $S$  es una subvariedad compleja, se tiene

$$S \cap U_j = \{p \in U_j : z_j^{m+1}(p) = \dots = z_j^n(p) = 0\}, \quad (1.8)$$

donde  $m = n - \nu_j$  es independiente de  $j$ . De hecho, si  $S \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , es claro que  $m_j = m_k$ . Entonces la afirmación se desprende de la conexidad de  $S$ . Para éste resultado, se dice que  $S$  es en si misma una variedad compleja. En

efecto si ponemos  $V_j = S \cap U_j$ ,  $V = \{V_j : V_j \neq \emptyset\}$  es un cubrimiento abierto localmente finito de  $S$ , y

$$z_{jS} : p \mapsto z_{jS}(p) = (z_j^1(p), \dots, z_j^m(p))$$

es un homeomorfismo de  $V_j$  en un polidisco en  $\mathbb{C}^m$ . La transformación coordenada

$$\tau_{jkS} : z_{kS}(p) \mapsto z_{jS}(p)$$

es un biholomorfismo puesto que es la restricción de  $\tau_{jk}$  :

$$(z_k^1, \dots, z_k^m, \dots, z_k^n) \mapsto (z_j^1, \dots, z_j^m, \dots, z_j^n) \quad \text{a} \quad \{z_k^{m+1} = \dots = z_k^n = 0\}.$$

Por consiguiente  $\{z_{jS} : V_j \neq \emptyset\}$  forma un sistema de coordenadas complejas locales, por lo tanto, definimos una estructura compleja sobre  $S$ . Así  $S$  es una variedad compleja de dimensión  $m = n - \nu$ .

En otras palabras,  $S$  es una subvariedad compleja, si para cada  $q \in S$  existe una vecindad  $U_q$  de  $q$  y una aplicación biholomorfa  $f : U_q \rightarrow \Delta(0, r)$  sobre un polidisco de  $\mathbb{C}^n$  tal que  $f(q) = 0$  y para algún entero  $k$ , se tiene

$$f(U_q \cap S) = \{z \in \Delta(0, r) : z_{k+1} = \dots = z_n = 0\}.$$

**Ejemplo 1.5** (Hipersuperficie Analítica). Sea  $S$  un subconjunto analítico de  $M^n$ , se define en  $S$  una sola ecuación  $\{f_q(p) = 0\}$  en alguna vecindad de cada  $q \in S$ . En éste caso se elige  $U_j$  como en la ecuación (1.7), se tiene

$$S \cap U_j = \{p \in U_j : f_j(p) = 0\} \tag{1.9}$$

donde  $f_j(p)$  es holomorfa en  $U_j$ . Si se identifica  $U_j$  con  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j) \subset \mathbb{C}^n$  del modo usual,

$$S \cap U_j = \{z_j \in \mathfrak{U}_j : f_j(z_j) = 0\}$$

es una hipersuperficie de  $\mathfrak{U}_j$ , donde  $f_j(p) = f_j(z_j)$  es una función holomorfa de  $z_j$  en  $\mathfrak{U}_j$ . Entonces si se toma  $U_{R(q)}(q)$  lo suficientemente pequeño, se puede elegir  $f_j(z_j)$  tal que  $f_j(z_j) = 0$  sea una ecuación minimal<sup>4</sup> de  $S \cap \mathfrak{U}_j$  en  $\mathfrak{U}_j$ . En éste caso  $f_j(p) = 0$  es llamado una ecuación minimal de  $S$  en  $U_j$ . Entonces  $S$  es regular en  $q \in S \cap U_j$  si y sólo si al menos una de las derivadas parciales  $\partial f_j(z_j) / \partial z_j^k$  de  $f_j(z_j)$  no se reduce en  $z_j = z_j(q)$ . De ésta manera se puede ver que una hipersuperficie analítica es un subconjunto analítico de  $M$ .

En consecuencia, el conjunto  $S'$  de todos los puntos regulares de  $S$  es un subconjunto abierto de  $S$ . Si se elige  $S'' = S \setminus S'$  como el conjunto de puntos singulares de  $S$ . Entonces  $S'' \cap \mathfrak{U}_j$  es definido por el sistema de ecuaciones holomorfas

$$f_j(z_j) = \frac{\partial f_j(z_j)}{\partial z_j^1} = \dots = \frac{\partial f_j(z_j)}{\partial z_j^n} = 0.$$

Así  $S''$  es un subconjunto analítico de  $M^n$ .  $M \setminus S''$  es una variedad compleja, y cada componente conexa de  $S' = S \setminus S''$  es una subvariedad de  $M^n \setminus S''$ .

---

<sup>4</sup> $f_0(z) = 0$  es una ecuación minimal de  $S$  en 0 si y sólo si  $f_0(z)$  y al menos una de sus derivadas parciales  $f_{0z_k}(z) = \partial f_0(z) / \partial z_k$  son primos relativos en el anillo de series de potencias.

### 1.2.3. Variedad Compleja compacta

Una variedad compleja  $M$  es llamada compacta si es un espacio topológico compacto, en el sentido usual. De este modo, a partir de algún atlas maximal  $\mathcal{A} = \{(U_j, z_j) : j = 1, 2, \dots\}$ , con  $z_j(U_j) = \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$  la identificación descrita en (1.3) muestra que cada variedad compleja, compacta  $M$  es obtenida por pegar un número finito de dominios  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_n$  en  $\mathbb{C}^n$  (vea figura 1.1). Bajo ésta notación se demostrará el siguiente teorema.

**Teorema 1.3.** *Una función holomorfa definida sobre una variedad compleja compacta  $M$ , es constante.*

*Demostración.* Como  $M$  es compacta y  $\mathbb{C}$  admite la norma del máximo, cada función holomorfa  $f : M \rightarrow \mathbb{C}$  alcanza su ‘máximo’, es decir

$$\exists q \in M \text{ tal que } |f(p)| \leq |f(q)|, \quad \forall p \in M.$$

Más aún, la función definida en (1.5) satisface  $f(p) = f_j(z_j) = f_j(z_j^1, \dots, z_j^n)$  y es holomorfa en  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$ ; en particular, si  $q \in U_j$  se puede suponer que  $\mathfrak{U}_j = z_j(U_j)$  contiene un polidisco de radio 1 y centro  $A_j = z_j(q)$  que cumple  $A_j = (a_j^1, \dots, a_j^n)$ . Con esto, se define

$$g(w) = f_j(a_j^1 + w(z_j^1 - a_j^1), \dots, a_j^n + w(z_j^n - a_j^n)), \text{ con } z_j = z_j(p),$$

la cual es holomorfa en el disco  $|w| < 1 + \varepsilon$ , para algún  $\varepsilon > 0$  pequeño, y satisface

$$|g(w)| = |f_j(a_j^1 + w(z_j^1 - a_j^1), \dots, a_j^n + w(z_j^n - a_j^n))| \leq |f_j(z_j(q))| = |g(0)|.$$

En otras palabras,  $g(w)$  alcanza su máximo en  $w = 0$ , el centro del disco  $|w| < 1 + \varepsilon$ . Por teorema del módulo máximo,

$$g(w) \text{ es constante en el disco } |w| < 1 + \varepsilon$$

y en consecuencia

(a.1)  $f_j : \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  es constante, si  $q \in U_j$ .

En efecto, se tiene  $|f_j(z_j(q))| \leq |f_j(\tilde{q})|$  para todo  $z_j(q) \in \mathcal{V}_j$  vecindad abierta de  $\tilde{q} \in \mathfrak{U}_j$ . Para probar que  $f_j$  es constante, considere arbitrariamente la recta compleja pasando por  $\tilde{q} \in \mathfrak{U}_j$ , definido como

$$\begin{aligned} L : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ \zeta &\mapsto L(\zeta) = \tilde{q} + w\zeta \end{aligned}$$

note que  $L$  es holomorfa y está bien definida. Tome  $w \in \mathfrak{U}_j$  con la propiedad de  $|w| < \rho$ , esto se da porque  $\mathfrak{U}_j$  es abierto, luego la restricción  $f_j|_L := \varphi_w$  es holomorfa en el disco  $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < \rho\}$  definido por

$$\varphi_w(\zeta) = f_j \circ L(\zeta) = f_j(\tilde{q} + w\zeta)$$

entonces

$$|\varphi_w(\zeta)| = |f_j(\tilde{q} + w\zeta)| \leq |f_j(\tilde{q})| = |\varphi_w(0)|$$

Así,  $|\varphi_w(\zeta)| \leq |\varphi_w(0)|$ , entonces  $\varphi_w$  alcanza su máximo en  $\zeta = 0$ . Por teorema del módulo máximo para una variable, en  $\varphi_w$  se tiene que,  $\varphi_w \equiv c(w)$  constante. Observe que la constante depende de  $w$  pero  $\varphi_w(0) = f_j(\tilde{q})$ , el cual es una constante, no depende de  $w$ , por tanto  $c(w)$  es constante. Luego  $f_j \equiv c$ , constante en  $\{w \in \mathbb{C}^n : |w| < \rho\}$ , haciendo variar  $w \in \mathfrak{U}_j$ , se tiene que  $f_j$  es constante en una vecindad de  $\tilde{q}$ , es decir  $\mathcal{V}_j$ , por teorema de la identidad se sigue que  $f_j$  es constante en todo  $\mathfrak{U}_j$ . Esto muestra (a.1). Más aún, se cumple:

(a.2) Cada  $f_j : \mathfrak{U}_j \rightarrow \mathbb{C}$  es constante.

En efecto, basta con probar que  $f_j(z_j(q)) = f_k(z_k(q))$  en la imagen de la intersección de cada par de abiertos coordenados  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ , es decir  $\mathfrak{U}_j \cap \mathfrak{U}_k$ , lo cual se da por la misma definición de variedad, y procediendo como en (a.1) se tiene que cada  $f_j$  es constante. Así se muestra (a.2) y se concluye, por continuación analítica <sup>5</sup> que  $f(p)$  es constante en todo  $M$ .  $\square$

**Observación 1.2.4.** Sea  $f : M \rightarrow \mathbb{C}^n$  una aplicación holomorfa y  $M$  una variedad compleja compacta, se tiene que  $f$  es constante.

### 1.3. Formas Diferenciales

Una forma diferencial puede ser entendida como una familia de operadores multilineales y antisimétricos, los que estan definidos sobre el espacio tangente a una variedad diferenciable. El concepto de forma diferencial es una generalización sobre ideas previas como el gradiente, la divergencia, el rotacional, etc. Esa generalización y la moderna notación usada en el estudio de las formas diferenciales se debe a Elie Cartan, [3].

En un espacio o variedad de dimensión  $n$ , pueden definirse 0-formas, 1-formas,  $\dots$  y  $n$ -formas.

Las 1-formas actúan como funciones lineales reales definidas sobre el espacio vectorial tangente a la variedad diferencial que se esté considerando. Así pues el conjunto de todas las 1-formas definidas en un punto de la variedad es isomorfo al espacio dual del espacio vectorial tangente en dicho punto.

**Definición 1.9.** Una  $k$ -forma alternada sobre un espacio vectorial real  $V$  de dimensión  $n$  es una función  $\varphi : V \times V \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}$  tal que para todo  $v_1, \dots, v_q, u, v \in V$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene:

1. Lineal en cada variable:  $\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, u + \alpha v, v_{i+1}, \dots, v_q)$  es igual a

$$\varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_q) + \alpha \varphi(v_1, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_q)$$

---

<sup>5</sup>Sea  $D_0$  un dominio de  $\mathbb{C}^n$ , y  $f_0(z)$  una función holomorfa en  $D_0$ . Para  $D_1$  otro dominio de  $\mathbb{C}^n$  con  $D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$ . Si existe una función holomorfa  $f_1(z)$  definida en  $D_1$  tal que  $f_1(z) = f_0(z)$  en  $D_0 \cap D_1$ , entonces  $f_1(z)$  es llamado una continuación analítica de  $f_0(z)$  en  $D_1$ .



2. *Antisimétrica:*  $\varphi(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, \dots, v_q) = -\varphi(v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_q)$

Las  $k$ -formas alternadas sobre un espacio vectorial  $V$  forman un espacio vectorial, denotado por  $\text{Alt}^k(V)$ . Claramente,  $\text{Alt}^1(V)$  está constituido por las transformaciones lineales sobre  $V$ .

**Ejemplo 1.6.** Sea  $M^{m \times n} = \{(a_{ij} : a_{ij} \in \mathbb{R})\}$  el espacio de las matrices de orden  $m \times n$  que puede ser identificado con  $M^{m \times n} \equiv \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{m-\text{veces}}$ , denotemos

$A = (a_{ij}) = (A_1, \dots, A_m)$  donde  $A_i = (a_{1i}, \dots, a_{ni})^t$  ( $t$  significa transpuesta). Una de las formas de definir la función determinante  $\det : M^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  se hace inductivamente de la siguiente manera:

$$\det(A) = \sum_i (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}),$$

donde  $j$  es fijada y  $A_{ij} \in M^{(m-1) \times (n-1)}$  es la matriz obtenida al quitar la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz  $A$ . La función

$$\begin{aligned} \det : M^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (A_1, \dots, A_n) &\mapsto \det(A_1, \dots, A_n), \end{aligned}$$

es  $n$ -lineal alternada, pues es lineal y antisimétrica.

**Ejemplo 1.7.** Toda función lineal  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$  es 1-lineal alternada, pues es lineal con respecto a la única variable y la condición de antisimetría no es posible violarla, dado que hay solo una variable y para alternar necesito por lo menos dos variables.

Sea  $U \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y  $\{dx_1, \dots, dx_n\}$  la base de  $(\mathbb{R}^n)^* = \text{Alt}^1(\mathbb{R}^n)$  dual a la base canónica.

**Definición 1.10.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $m$ , una  $k$ -forma sobre la variedad  $M$  es una aplicación

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M) \\ p &\mapsto \omega_p : T_p M \times \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde  $\omega_p$  es una  $k$ -forma alternada.

El espacio  $\bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M)$  es denotado por  $\text{Alt}^k(TM)$  y el espacio de  $k$ -formas sobre  $M$  por  $\Omega^k(M)$ . Así, en cada abierto coordenado,  $U \subset M$ , la  $k$ -forma  $\omega$  puede representarse como

$$\omega = \sum a_I dx^I$$

donde  $a_I : U \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones definidas en  $U$ . Diremos que  $\omega$  es de clase  $C^r$  ( $0 \leq r \leq \infty$ ) holomorfas<sup>6</sup> si las aplicaciones son de clase  $C^k$  u holomorfas.

---

<sup>6</sup>Cuando las formas son complejas las  $a_j : U \subset M \rightarrow \mathbb{C}$

**Ejemplo 1.8.** La diferencial total de una función de varias variables puede ser tratada rigurosamente como una 1-forma. Si se tiene una función de varias variables  $f(x_1, \dots, x_n)$  diferenciable, su diferencial total es una 1-forma exacta:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

Con estos antecedentes se puede generalizar la idea y ver otra interpretación para función holomorfa, como en la siguiente observación:

**Observación 1.3.1.** Dado  $D \subset \mathbb{C}^n$  un abierto. Una función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}^m$  es considerada holomorfa, si  $f : D \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2m}$  es una aplicación de clase  $C^1$  y para cada  $z \in D$ , la diferencial  $df(z) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  es  $\mathbb{C}$ -lineal, vea [12].

Veamos qué debe cumplir una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$  para que sea  $\mathbb{C}$ -lineal. Si es  $\mathbb{C}$ -lineal entonces  $g(z_1, \dots, z_n) = c_1 z_1 + \dots + c_n z_n$ , para ciertos  $c_i = a_i + ib_i$  en  $\mathbb{C}$ . Si llamamos  $z_i = x_i + iy_i$  entonces

$$g(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) = (a_1 x_1 - b_1 y_1 + \dots + a_n x_n - b_n y_n, a_1 y_1 + b_1 x_1 + \dots + a_n y_n + b_n x_n),$$

luego la matriz de  $g$  es

$$\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & \cdots & a_n & -b_n \\ b_1 & a_1 & \cdots & b_n & a_n \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, si la matriz  $g$  es de esta forma (para números reales cualesquiera  $a_i$  y  $b_i$ ) entonces  $g$  es  $\mathbb{C}$ -lineal.

### 1.3.1. Producto exterior

**Definición 1.11.** Una  $k$ -forma diferencial de clase  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) es holomorfa en una variedad  $M$ , localmente se expresa como,

$$\omega = \sum_I a_I \wedge dx^I,$$

con cada componente  $a_I$  diferenciable. El diferencial  $d\omega$  de  $\omega$  es la  $(k+1)$ -forma diferencial dada por

$$d\omega = \sum_I d\omega_I \wedge dx^I.$$

Es decir, tomamos la suma de los productos exteriores del diferencial de cada componente  $\omega_I$  con su respectivo producto  $dx^I$ .

**Ejemplo 1.9.** Sea  $\omega$  la 1-forma diferencial de  $\mathbb{R}^3$  dada por

$$\omega = xydx - y^2dy + 3zdz.$$

Entonces,  $d\omega$  es la 2-forma diferencial

$$\begin{aligned} d\omega &= d(xy) \wedge dx - d(y^2) \wedge dy + d(3z) \wedge dz \\ &= (ydx + xdy) \wedge dx - (2ydy) \wedge dy + (3dz) \wedge dz \\ &= xdy \wedge dx = -xdx \wedge dy \end{aligned}$$

**Definición 1.12.** Dadas una  $k$ -forma  $\omega = \sum_I a_I dx_I$  con  $I = (i_1, \dots, i_k)$ ,  $i_1 < \dots < i_k$  y una  $s$ -forma  $\eta = \sum_J b_J dx_J$  con  $J = (j_1, \dots, j_s)$ ,  $j_1 < \dots < j_s$ . El producto exterior de ambas formas es una  $s + k$ -forma definida como

$$\omega \wedge \eta = \sum_{IJ} a_I b_J dx_I \wedge dx_J.$$

La definición de producto exterior es hecha de modo que si  $\omega_1, \dots, \omega_k$  son 1-formas entonces el producto  $\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k$  sea una  $k$ -forma definida por

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k(v_1 \dots v_k) = \det(\omega_i(v_j))$$

**Ejemplo 1.10.** Considere  $\omega = x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3$  una 1-forma en  $\mathbb{R}^3$  y  $\eta = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3$  una 2-forma en  $\mathbb{R}^3$ . Entonces el producto exterior de estas dos formas será

$$\omega \wedge \eta = x_1 x_3 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 - x_2 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 = (x_1 x_3 - x_2) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

### Observaciones 1.3.1.

1) Si  $k = 0$  entonces  $\text{Alt}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}$  y  $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ .

2) Los  $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}(v_1 \dots v_k)$  donde  $I = (i_1 < \dots < i_k)$  forman una base para  $\text{Alt}^k(\mathbb{R}^n)$ . Así todo elemento  $\omega \in \Omega^k(U)$  se puede expresar como

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{i_1, \dots, i_k} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

donde  $\omega_{i_1, \dots, i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ . Para abreviar, escribiremos

$$\omega = \sum_I \omega_I dx_I \in \Omega^k(U).$$

3) Sean  $\omega = \sum_I \omega_I dx_I$ ,  $\eta = \sum_I \eta_I dx_I \in \Omega^k(U)$  y  $\phi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  entonces

$$\begin{aligned} \omega + \eta &= \sum_I (\omega_I + \eta_I) dx_I \\ \phi \omega &= \sum_I (\phi \omega_I) dx_I. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.11.** Consideremos  $U = \mathbb{R}^3$ ,  $\omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3 \in \Omega^1(U)$  y  $\eta = \eta_{12} dx_1 \wedge dx_2 + \eta_{13} dx_1 \wedge dx_3 + \eta_{23} dx_2 \wedge dx_3 \in \Omega^2(U)$ , así

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= \omega_1 \eta_{23} dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \omega_2 \eta_{13} dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 + \omega_3 \eta_{12} dx_3 \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\omega_1 \eta_{23} - \omega_2 \eta_{13} + \omega_3 \eta_{12}) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.12.** Consideremos  $U \subset \mathbb{R}^3$  así tenemos  $\Omega^1(U)$ ,  $\Omega^2(U)$  y  $\Omega^3(U)$  los espacios sobre  $\mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$  generados respectivamente por  $\{dx_1, dx_2, dx_3\}$ ,  $\{dx_1 \wedge dx_2, dx_1 \wedge dx_3, dx_2 \wedge dx_3\}$  y  $\{dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3\}$  de donde

$$\omega \in \Omega^1(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_1 dx_1 + \omega_2 dx_2 + \omega_3 dx_3,$$

donde  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \mathcal{C}^\infty$ .

$$\omega \in \Omega^2(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_{12}dx_1 \wedge dx_2 + \omega_{13}dx_1 \wedge dx_3 + \omega_{23}dx_2 \wedge dx_3,$$

donde  $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23} \in \mathcal{C}^\infty$ .

$$\omega \in \Omega^3(U) \Leftrightarrow \omega = \omega_{123}dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3,$$

donde  $\omega_{123} \in \mathcal{C}^\infty$ .

### 1.3.2. Suma directa

**Definición 1.13.** La **suma directa**  $E \oplus F$  de dos  $A$ -módulos derechos <sup>7</sup>  $E$  y  $F$  es la totalidad de pares ordenados  $\{(x, y) : x \in E, y \in F\}$ . La operación suma y la acción  $A$  se definen “entrada por entrada”, como es de esperar:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2), \quad (x, y)a = (xa, ya)$$

Es usual identificar  $E$  con  $E \oplus 0$  y  $F$  con  $0 \oplus F$ , para poder considerar  $E$  y  $F$  como submódulos de  $E \oplus F$ .

### 1.3.3. La Complexificación del Espacio Tangente

Sea  $M$  una variedad compleja, con  $\dim_{\mathbb{C}} M = m$ , para cada  $k \in \mathbb{N}$  tenemos

$$Alt^k(T_p M^c) = Alt(T_p M \oplus \overline{T_p M})$$

donde  $T_p M^c$  es llamado la complexificación del espacio tangente (o también espacio tangente complexificado), esto es:

Sea  $V$  espacio vectorial de  $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ , definimos su complexificado como  $V^c = V \times V$  junto a las siguientes operaciones:

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$$

$$(a + ib) \cdot (v_1, v_2) = (av_1 - bv_2, bv_1 + av_2)$$

Luego  $V^c$  es un espacio vectorial complejo de  $\dim_{\mathbb{C}} V^c = n$

**Lema 1.1.** Si  $(e_1, \dots, e_n)$  es base real de  $V$ , entonces  $((e_1, 0), \dots, (e_n, 0))$  es base compleja de  $V^c$ .

---

<sup>7</sup>Un  $A$ -módulo derecho  $E$  sobre un anillo  $A$  es un grupo abeliano  $(E, +)$  junto con una operación  $E \times A \rightarrow E$  (llamada multiplicación escalar) de modo tal que para todo  $a, b \in A$  y  $x, y \in E$  se satisfacen:

$$* (x + y)a = xa + ya.$$

$$* x(a + b) = xa + xb.$$

$$* x(ab) = (xa)b.$$

$$* x1 = x \text{ para la unidad } 1 \text{ de } A \text{ (ie. todos nuestros módulos son unitarios).}$$

Observe que  $i.(v, 0) = (0, v)$  y si  $(v, w) \in V^c \Rightarrow (v, w) = v + iw$ .  
 Ahora, sea  $M$  una variedad compleja (holomorfa) con dimensión real igual a  $\dim_{\mathbb{R}} M = 2\dim_{\mathbb{C}} M = 2m$ .

Así, para cada  $p \in M$  escogemos una parametrización

$$\begin{aligned} f : U \subset \mathbb{C}^m &\rightarrow M \\ (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) &\mapsto f(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) \end{aligned}$$

la base real de  $T_p M$  es:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_p \right)$$

luego por el lema anterior tendremos que:

$$\left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p, 0 \right), \left( \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_p, 0 \right), \dots, \left( \frac{\partial}{\partial x_m} \Big|_p, 0 \right), \left( \frac{\partial}{\partial y_m} \Big|_p, 0 \right) \right)$$

es la base compleja de  $T_p M^c$ . Equivalente a escribir

$$\left( \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \Big|_p \right)$$

considerando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} \Big|_p &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p - i \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p, -\frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \Big|_p &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p + i \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_p \right) \end{aligned}$$

Luego como  $T_p M$  es generado por  $\left( \frac{\partial}{\partial z_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial z_m} \Big|_p \right)$  entonces definamos  $\overline{T_p M}$  como el espacio vectorial generado por  $\left( \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_m} \Big|_p \right)$ , de ahí que:

$$T_p M^c = T_p M \oplus \overline{T_p M}.$$

Una  $k$ -forma en el complexificado del espacio tangente es un aplicación:

$$\begin{aligned} \omega : M &\rightarrow \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M^c) \\ p &\mapsto \omega_p : T_p M^c \times \dots \times T_p M^c \rightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

podemos denotar:

$$\text{Alt}^k(TM^c) := \bigcup_{p \in M} \text{Alt}^k(T_p M^c)$$

y como  $\Omega_c^k(M)$  al espacio de las  $k$ -formas en el complexificado. Esto quiere decir  $\Omega_c^k(M) = \{\omega_p : \text{Alt}^k(TM^c) \rightarrow \mathbb{C}\}$ , tiene estructura de  $R$ -módulo, donde  $R = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ es diferenciable}\}$  es el anillo.

Luego la base de éste módulo, localmente, es  $(dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q})$  donde  $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq m$  y  $1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq m$ , además que  $p + q = k$

Simplificando la notación tenemos:

$$dz_J \wedge d\bar{z}_K = dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q}$$

de este modo la base anterior quedará expresada:  $dz_J \wedge d\bar{z}_K : |J| + |K| = k$  así toda  $k$ -forma complexificada sobre  $M$  se escribe como:

$$\omega = \sum_{|J|+|K|=q} a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

donde  $a_{JK} : M \rightarrow \mathbb{C}$

**Definición 1.14.** Una  $k$ -forma complexificada  $\omega$  sobre  $M$  tiene bigrado  $(p, q)$ , donde  $p + q = k$ , si es posible escribir

$$\omega = \sum_{|J|=p, |K|=q} a_{JK} dz_J \wedge d\bar{z}_K$$

Luego  $\Omega_c^{(p,q)}(M)$ , el espacio de formas de bigrado  $(p, q)$ , forma también un módulo sobre el anillo de funciones diferenciables. Esto nos permite notar que:

$$\Omega_c^k(M) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega_c^{(p,q)}(M)$$

## 1.4. Fibrados Vectoriales

**Definición 1.15.** Sea  $M$  una variedad diferenciable. Entonces una variedad diferenciable  $E$ , es llamado fibrado vectorial sobre  $M$  si satisface las siguientes condiciones:

1. La aplicación  $C^\infty$ ,  $\pi : E \rightarrow M$ , de  $E$  sobre  $M$  es dada.
2.  $\forall p \in M$ ,  $\pi^{-1}(p)$  es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial  $\nu$ -dimensional:  $\pi^{-1}(p) \cong \mathbb{C}^\nu$ , donde  $\nu$  es independiente de  $p$ .
3.  $\forall q \in M$ , existe una vecindad  $U$  con  $q \in U \subset M$ , tal que  $\pi^{-1}(U) = U \times \mathbb{C}^\nu$  y para cualquier  $p \in U$ ,  $p \times \mathbb{C}^\nu$  es isomorfo a  $\pi^{-1}(p)$  como un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial:  $\pi^{-1}(p) \cong p \times \mathbb{C}^\nu$

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_j) \subset E & \xrightarrow{\pi} & U_j \subset M \\ \uparrow F_j & \nearrow \pi_1 & \\ U_j \times \mathbb{C}^\nu & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \pi \circ F_j = \pi_1$$

Llamaremos a  $\pi^{-1}(p)$  la fibra de  $E$  sobre  $p$ , que denotaremos por  $E_p$ ,  $\nu$  es el rango de la variedad  $E$ .  $M$  será considerado el espacio base de  $E$ , y  $\pi$  la proyección. Denotaremos a  $E$  por  $(E, M, \pi)$ .

**Ejemplo 1.13** (Fibrado Trivial). Sea  $M$  una variedad, el fibrado trivial es  $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$  donde  $\pi(p, v) = p$ . Observe que la  $\text{Id} : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(M)$  es la trivialización. Por definición de fibrado, todo fibrado vectorial es localmente trivial.

Sea  $M = \bigcup_{j \in J} U_j$  cubrimiento localmente finito de  $M$  y  $(E, M, \pi)$  un fibrado vectorial sobre  $M$ . Si cada  $U_j$  es tomado lo suficientemente pequeño, tenemos por condición (3) que:

$$\pi^{-1}(U_j) = U_j \times \mathbb{C}^\nu = \{(p, \zeta_j) / p \in U_j, \zeta_j = (\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^\nu)\}$$

puesto que  $p \times \mathbb{C}^\nu \simeq \pi^{-1}(p)$ , entonces  $(\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^\nu)$  es un sistema de coordenadas sobre el espacio vectorial  $\pi^{-1}(p)$ .

Para  $p \in U_{jk}$ , donde denotamos  $U_{jk} := U_j \cap U_k$ ,  $(\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^\nu)$  y  $(\zeta_k^1, \dots, \zeta_k^\nu)$  son sistemas coordenados del mismo espacio vectorial  $\pi^{-1}(p)$  de aquí existe una transformación lineal invertible  $(f_{jk}^\alpha)$  tal que:

$$\zeta_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^{\nu} f_{jk\beta}^{\alpha(p)} \zeta_k^\beta \quad (1.10)$$

donde  $(p, \zeta_j) \in U_j \times \mathbb{C}^\nu$  y  $(p, \zeta_k) \in U_k \times \mathbb{C}^\nu$  son el mismo punto de  $E$  si y sólo si cumple (1.10). Llamaremos a  $(\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^\nu)$  la fibra coordenada de  $(p, \zeta_j) \in E_p$  sobre  $U_j$ . Ya que el subdominio  $\pi^{-1}(U_j)$  de  $M$  es, por condición (3), isomorfa a  $U_j \times \mathbb{C}^\nu$  como una variedad diferenciable, así  $\zeta_j^1, \dots, \zeta_j^\nu$  son funciones  $C^\infty$  en  $\pi^{-1}(U_j)$ . Consecuentemente en (1.10),  $\zeta_j^\alpha$  es una función  $C^\infty$  de  $(p, \zeta_k^1, \dots, \zeta_k^\nu)$ , de ahí que  $f_{jk\beta}^\alpha(p)$  es una función  $C^\infty$  en  $U_{jk}$ . Pero usando notación vectorial, (1.10) puede ser escrito más simple como:

$$\zeta_j = f_{jk}(p) \cdot \zeta_k \quad (1.11)$$

Las funciones transición,  $f_{jk}(p)$ , satisface las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} f_{jj} = 1, \text{ donde } 1 \text{ denota la matriz unidad} \\ f_{jk} \cdot f_{kj} = 1 \\ f_{jk} \cdot f_{kl} \cdot f_{lj} = 1 \end{cases}$$

#### Observaciones 1.4.1.

1. Tenemos que  $f_{jk} = f_{jk}(p)$  denota la matriz  $(f_{jk\beta}^\alpha(p))_{\alpha,\beta=1,2,\dots,\nu}$ . Donde se tiene que  $\det f_{jk}(p) \neq 0$ .
2. Las funciones transición,  $f_{jk}$ , permite determinar y reconstruir el fibrado vectorial  $E$ , así como expresar localmente los objetos definidos sobre  $E$  en base a estas funciones transición.
3. Aquí escribiremos  $E = \{f_{jk}\}$ , un fibrado vectorial, determinado únicamente por dar  $f_{jk}$  con  $j, k = 1, 2, \dots$

$$\begin{array}{ccccc}
& & F_k^{-1} \circ F_j & & \\
& \nearrow & & \searrow & \\
U_{jk} \times \mathbb{R}^\nu & \xrightarrow{F_j} & \pi^{-1}(U_{jk}) & \xrightarrow{F_k} & U_{jk} \times \mathbb{R}^\nu \\
\downarrow \pi_1 & & \swarrow \pi & & \searrow \pi \\
& & U_{jk} & & U_{jk}
\end{array}$$

De manera que  $F_k^{-1} \circ F_j(p, \zeta) = (p, f_{jk}(p) \cdot \zeta)$  donde  $f_{jk} : U_{jk} \rightarrow GL(\mathbb{R}^\nu, \mathbb{R}^\nu)$

**Ejemplo 1.14** (Fibrado Tangente). Sea  $M$  una variedad diferenciable con parametrizaciones  $f_j : U_j \rightarrow M$ , y sea  $E = \bigcup_j \{j\} \times V_j \times \mathbb{R}^m$  donde  $V_j = f(U_j)$ , consideremos la relación de equivalencia

$$(j, p, v) \sim (k, q, w) \text{ si } p = q \text{ y } (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p))v = w$$

definimos fibrado tangente por  $TM = \frac{E}{\sim}$ , a partir de ahí tenemos la siguiente proyección natural

$$\begin{aligned}
\pi : TM &\rightarrow M \\
[j, p, v] &\mapsto p
\end{aligned}$$

y las funciones

$$\begin{aligned}
F_j : V_j \times \mathbb{R}^m &\rightarrow TM \\
(p, v) &\mapsto [j, p, v]
\end{aligned}$$

cuya composición de una de ellas con la inversa de otra está dada por

$$\begin{aligned}
F_k^{-1} F_j : (V_j \cap V_k) \times \mathbb{R}^m &\rightarrow (V_j \cap V_k) \times \mathbb{R}^m \\
(p, v) &\mapsto (p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)) \cdot v)
\end{aligned}$$

y tiene como regla de definición

$$(p, v) \mapsto^{F_j} [j, p, v] = [k, p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)) \cdot v] \mapsto^{F_k^{-1}} (p, (f_k^{-1} f_j)'(f_j^{-1}(p)) \cdot v)$$

esto es para asegurarnos que  $TM$  es una variedad diferenciable.

Luego la proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  definida por  $\pi(p, v) = p$  para  $v \in T_p M$ , efectivamente es un fibrado vectorial.

### 1.4.1. Secciones de un Fibrado

A continuación se dará el concepto de *Secciones de un Fibrado* y un ejemplo donde veremos que la sección de un fibrado tangente, es un campo vectorial.

**Definición 1.16.** Una sección sobre un fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  en un abierto  $U \subseteq M$ , es una función  $s : U \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = Id_U$ , es decir el diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
U & \xrightarrow{s} & E \\
& \searrow Id & \downarrow \pi \\
& & U
\end{array}$$



El espacio de las secciones de clase  $C^k$  será denotado por  $\Gamma^k(M, E)$ .

### Representación Local de las Secciones

Sea  $s: M \rightarrow E$  una sección ( $\pi \circ s = Id$ ) con  $F_j^{-1} \circ s(p) = F_k(p, s_j(p))$  en  $U_j$  donde  $s_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}$ ,

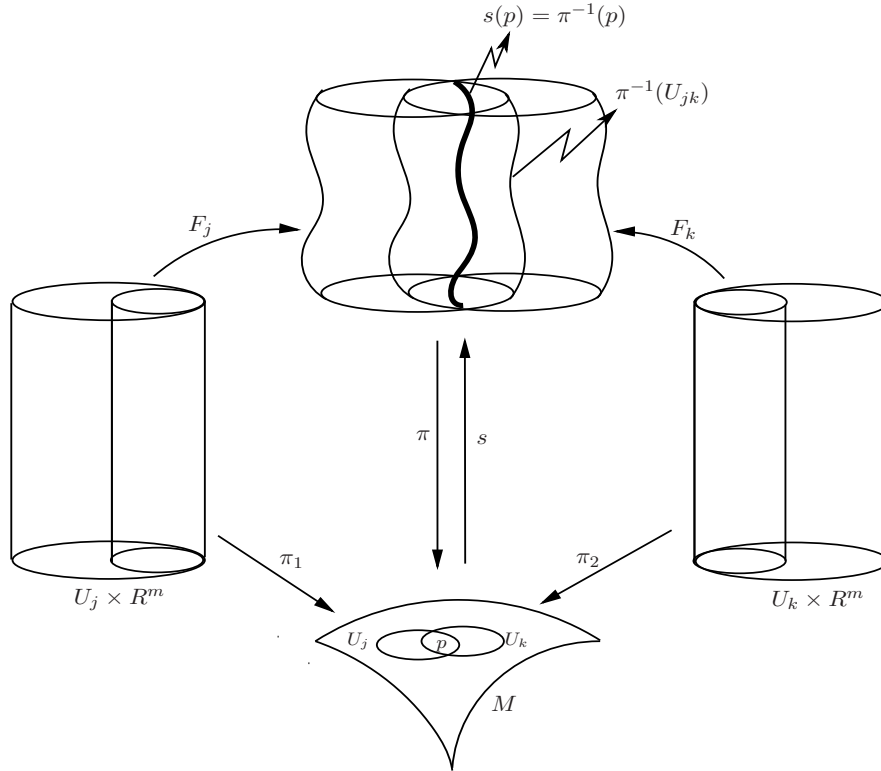
$$\begin{array}{ccc} U_j \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{F_j} & E \\ & \searrow F_j^{-1} \circ s & \uparrow s \\ & & U_j \subset M \end{array}$$

Luego en  $U_{jk} = U_j \cap U_k$  se tiene que  $F_j(p, s_j(p)) = s(p) = F_k(p, s_k(p))$ , así  $(p, s_k(p)) = F_k^{-1} \circ F_j(p, s_j(p)) = (p, f_{jk}(p)s_j(p))$ , entonces se cumple la siguiente relación

$$s_k = f_{jk}s_j \text{ en } U_{jk} \quad (1.12)$$

que nos permite ver cómo son las secciones localmente.

Veamos el siguiente ejemplo:



**Ejemplo 1.15** (Campo Vectorial). Una sección del fibrado tangente  $TM$  es llamado campo vectorial. Un campo  $X: M \rightarrow TM$  puede ser representado en  $U_j \subseteq M$  por

$$F_j^{-1}X(p) = (p, X_j(p))$$

donde  $F_j : U_j \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$  es una trivialización de  $TM$  y  $X_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Definimos  $\tilde{X}_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que  $f'_j \tilde{X}_j = X$ . En  $f_k^{-1}(U_{jk})$  tenemos que

$$\tilde{X}_k = (f_k^{-1} f_j)_* \tilde{X}_j$$

esto es,  $X_k$  es la imagen recíproca de  $X_j$  por medio del cambio de variable  $f_k^{-1} f_j$ , según la definición siguiente, de pullback.

**Definición 1.17.** Sea  $\omega$  una  $q$ -forma en  $\mathbb{R}^m$  y  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación diferenciable, la imagen recíproca de  $\omega$  por medio de  $f$  es una  $q$ -forma  $f^* \omega$  en  $\mathbb{R}^m$  definida como

$$f^*(\omega)(p)(v_1, \dots, v_q) = \omega(f(p))(df(p)v_1, \dots, df(p)v_q)$$

$p \in \mathbb{R}^m, v_1, \dots, v_q \in \mathbb{R}^m$ . Si  $g$  es una 0-forma, la imagen recíproca de  $g$  por medio de  $f$  es simplemente la composición

$$f^*(g) = g \circ f$$

### 1.4.2. Morfismos de fibrados

**Definición 1.18.** Sean  $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$  y  $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$  fibrados vectoriales. Una aplicación  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  es un morfismo de fibras vectoriales si:

1.  $\varphi|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(\varphi(p))$  es una transformación lineal.
2. El diagrama siguiente, conmuta

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{Id_M} & M \end{array}$$

Si existe otro morfismo de fibrados  $\psi$  tal que  $\psi\varphi = Id_{E_2}$  y  $\varphi\psi = Id_{E_1}$  entonces  $\varphi$  será llamado isomorfismos de los fibrados  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .

Si  $\varphi$  es un morfismo de los fibrados  $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$  y  $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$  cuyas trivializaciones son  $F_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(U_j)$  y  $G_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_2^{-1}(U_j)$  respectivamente. Entonces,  $\varphi_j = G_j^{-1} \varphi F_j$  es de la forma  $\varphi_j(p, v) = (p, a_j(p)v)$  donde  $a_j : U_j \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  ( $a_j : U_j \rightarrow GL(n)$  si  $\varphi$  es un isomorfismo). Luego para otro índice  $k$ ,  $\varphi_k = G_k^{-1} \varphi F_k$ . Así, en la intersección  $U_{jk}$  tenemos la siguiente relación

$$G_k \varphi_k F_k^{-1} = G_j \varphi_j F_j^{-1}$$

que equivale a la relación  $\varphi_k F_k^{-1} F_j = G_k^{-1} G_j \varphi_j$  en  $U_{jk}$ . Luego aplicando a  $(p, v)$  conseguimos

$$(p, a_k f_{kj}(p)v) = \varphi_k F_k^{-1} F_j(p, v) = G_k^{-1} G_j \varphi_j(p, v) = (p, g_{kj} a_j(p)v)$$

Luego la relación fundamental que determina un morfismo de fibrado.

$$a_k f_{kj} = g_{kj} a_j \quad \text{en } U_{kj} \tag{1.13}$$

Recíprocamente, dadas las funciones  $a_j : U_j \rightarrow GL(n)$  tales que  $a_k f_{kj} = g_{kj} a_j$  en  $U_j \cap U_k$ , podemos construir un isomorfismo de fibrado  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  definiendo

$$\varphi|_{U_j} = G_j \varphi_j F_j^{-1}, \quad \text{donde } \varphi_j(p, v) = (p, a_j(p) \cdot v)$$

pues en  $U_{jk}$  tenemos la identidad  $F_k^{-1} \varphi_k G_k = F_j^{-1} \varphi_j G_j$ , ya que

$$\varphi_k F_k F_j^{-1}(p, v) = (p, a_k f_{kj}(p) \cdot v) = (p, g_{kj} a_j(p) \cdot v) = G_k G_j^{-1} \varphi_j(p, v).$$

**Ejemplo 1.16.** Sea  $\pi : E \rightarrow M$  un fibrado de rango 1 (fibrado de línea) tal que una sección  $s : M \rightarrow E$  no se anule en ningún punto de  $M$ . Entonces el fibrado es trivial. Luego existe un isomorfismo entre  $E \times \mathbb{R}$  y  $E$ ,

$$\begin{array}{ccc} E \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & E \\ & \searrow F_j^{-1} \cdot s & \uparrow s \\ & & M \subset M \end{array}$$

Basta ver que  $F_j^{-1} \cdot s(p) = (p, s_j(p))$  en  $U_j \subset M$  donde  $s_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$  tal que cumple la ecuación (1.12) reescrita como  $s_k \cdot \mathbf{1} = f_{jk} \cdot s_j$  donde  $\mathbf{1}$  representa el cociclo del fibrado trivial, luego por el resultado en la ecuación (1.13) y como los  $s_j$  y  $s_k$  no se anulan en ningún punto entonces se tiene así que  $\varphi$  es un isomorfismo de fibrados.

## Capítulo 2

# Deformaciones de Estructuras Complejas

*Cuando se asume la determinación de ¡No seré derrotado! ¡Triunfaré!,  
cada dificultad se convierte en un trampolín dirigido a nuestro desarrollo,  
y un tesoro que adornará nuestra vida.*

*Daisaku Ikeda.*

### 2.1. Familia Analítica Compleja de Variedades Complejas Compactas

Si  $M$  es una variedad compleja compacta de dimensión  $n$ , donde se asume su sistema de coordenadas complejas locales finita,  $\{(U_j, z_j); j = 1, \dots, l\}$ . Una variedad compleja es obtenida por pegar un número finito de polidiscos  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_l$  por identificación  $z_k \in \mathfrak{U}_k$  y  $z_j = f_{jk}(z_k) \in \mathfrak{U}_j$ .

Una *deformación* de  $M$  es considerada como la variedad compleja obtenida por pegar los mismos polidiscos  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_l$  via funciones transición diferentes. En otras palabras, se reemplaza  $f_{jk}^\alpha(z_k)$  por las funciones

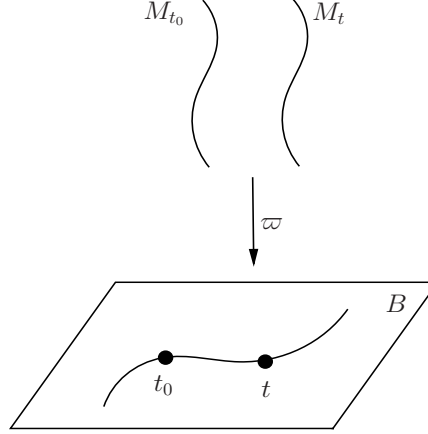
$$f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m)$$

con la *condición inicial*  $f_{jk}^\alpha(z_k, t_0) = f_{jk}^\alpha(z_k)$  donde  $t = (t_1, \dots, t_m)$  es un parámetro que representa un punto variable en alguna variedad conexa (compleja o real diferenciable)  $B$ . Las condiciones iniciales aseguran que para  $t = t_0 \in B$ , las deformaciones que se obtienen es  $M$  en sí mismo. Además para cada  $t \in B$ , si se denota  $M_t$  la variedad compleja obtenida por pegar los polidiscos  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_l$  via las funciones transición  $f_{jk}^\alpha(z_k, t)$ , entonces cada  $M_t$  es llamado una deformación de  $M_{t_0} = M$ . La deformación de  $M$  no es mas que el desplazamiento de sus cartas coordenadas. Esta es la idea fundamental de Kodaira y Spencer. Definamos ahora lo que es una Familia Analítica Compleja.

**Definición 2.1** (Familia Analítica Compleja). *Sea  $B$  una variedad compleja (conexa) y  $\{M_t/t \in B\}$  un conjunto de variedades complejas compactas conexas dependiendo de  $t \in B$ . Decimos que  $M_t$  depende analíticamente de  $t$  y que*

$\{M_t/t \in B\}$  forma una **familia analítica compleja**, si existe una variedad compleja  $\mathcal{M}$  y una aplicación holomorfa  $\varpi$  de  $\mathcal{M}$  en  $B$  tal que:

1. El rango de la matriz Jacobiano de  $\varpi$  es igual a la dimensión compleja de  $B$  en cada punto de  $M$  y
2.  $\varpi^{-1}(t) = M_t$  para cada  $t \in B$  (esto implica que  $M_t$  es una subvariedad compleja compacta de  $\mathcal{M}$ ),



**Nota:** Observe en la definición, que  $\varpi$  con las condiciones dadas, equivale a decir que  $\varpi$  es una sumersión propia con fibras compactas.

Entonces sucede que si se considera la familia analítica compleja  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  de variedades complejas conexas compactas  $M_t = \varpi^{-1}(t), t \in B$ , entonces para una fibra fija  $M = M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0), t_0 \in B$ , cualquier otra fibra lo suficientemente cerca  $M_t = \varpi^{-1}(t)$ , es decir  $t$  suficientemente cerca de  $t_0$ , es simplemente una variedad compleja obtenida por los mismos polidiscos que forman el sistema de abiertos coordenados complejos locales de  $M$  vía las funciones transición, exactamente de la forma mencionada anteriormente, de manera que las fibras cercanas son en realidad las deformaciones de la variedad  $M$ . Más formalmente pasamos a definir lo que es deformación.

**Definición 2.2** (Deformación Global y Local). Sea  $M$  una variedad compleja conexas compacta y  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja de variedades complejas conexas compactas con  $M \cong M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  para algún  $t_0 \in B$ . Si existe un dominio  $I \subset B$  conteniendo  $t_0$  que satisface:

1. Para cada  $t \in I$ ,  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  es una variedad compleja compacta obtenida por pegar los polidiscos  $\mathfrak{U}_1, \dots, \mathfrak{U}_l$  via las funciones transición

$$f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m)$$

con la condición inicial  $f_{jk}^\alpha(z_k, t_0) = f_{jk}^\alpha(z_k)$  donde  $t = (t_1, \dots, t_m)$  son coordenadas complejas locales en  $I$ , y

2.  $f_{jk}(z_k, t)$  son funciones  $C^\infty$  holomorfas en  $t$ .

Se le llama a la variedad compleja conexa compacta  $M_t = \varpi^{-1}(t)$ , para cada  $t \in I$ , una deformación local de estructura compleja de  $M$ . De manera más general llamamos a la fibra  $M_t = \varpi^{-1}(t)$ , para cada  $t \in B$ , una deformación global de estructura compleja de  $M$ .

La existencia de  $I$  se asegura por la misma definición de familia analítica compleja, siempre podemos encontrar un cubrimiento abierto localmente finito  $\{U'_j : j \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathcal{M}$  y un sistema de cartas coordenadas locales  $\{(U'_j, z_j) : j \in \mathbb{N}\}$  con cada  $z_j$  holomorfa de  $U'_j$  en  $\mathfrak{U}_j \times I_j \times \mathfrak{U}_j \subset \mathbb{C}^n$  es un dominio que puede ser asumido como el polidisco:

$$\mathfrak{U}_j = \{z_j(p) = (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p)) \in \mathbb{C}^n : p \in U'_j, |z_j^\alpha(p)| < r_j^\alpha, \alpha = 1, \dots, n\}$$

y donde  $I_j \subset B$  es (identificado via la aplicación coordenada holomorfa con) un dominio en  $\mathbb{C}^m$ ,  $m$  la dimensión de  $B$  como variedad compleja.

Aquí  $I_j$  puede ser escogido como un multi-intervalo abierto dado por

$$I_j = \{t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m : a_{j\nu} < t_\nu < b_{j\nu}, \nu = 1, \dots, m\}.$$

Así se tiene para  $p \in U'_j \subset \mathcal{M}$ ,

$$z_j(p) = (z_j^1(p), \dots, z_j^n(p), t_1, \dots, t_m), \varpi(p) = (t_1, \dots, t_m).$$

Las funciones transición  $\{f_{jk}\}$  que pega los dominios  $\{\mathfrak{U}_j \times I_j\}$  para dar la variedad compleja  $\mathcal{M}$  se dan como de costumbre por  $f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$  y son funciones holomorfas en las variables  $t$  y  $z_k$  (en efecto, las funciones  $\{f_{jk}\}$  son holomorfas en la variable  $z_k$ ) y, por lo tanto, se escriben como  $f_{jk}(z_k, t)$ . Así los puntos  $(z_j, t) \in \mathfrak{U}_j \times I_j$  y  $(z_k, t') \in \mathfrak{U}_k \times I_k$  representan el mismo punto de  $\mathcal{M}$  si y solo si  $(z_j, t) = f_{jk}(z_k, t')$  lo cual significa que  $t$  y  $t'$  necesariamente deben representar el mismo punto de  $B$ .

Ahora fijamos cualquier  $t_0 \in B$ . Entonces  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  es la variedad compleja conexa compacta obtenida por pegar los polidiscos  $\{U_j \times \{t_0\} \cong \mathfrak{U}_j : U'_j \cap M_{t_0} \neq \emptyset\}$  via las funciones de transición (biholomorfas)  $\{f_{jk}(z_k, t_0)\}$  y, por lo tanto, los puntos  $z_j \in \mathfrak{U}_j$  y  $z_k \in \mathfrak{U}_k$  representan el mismo punto de  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  si y solo si  $z_j = f_{jk}(z_k, t_0)$ .

Por la compacidad de las fibras de  $\varpi$  y el hecho de que el cubrimiento abierto  $\{U'_j\}$  es localmente finito, se puede ver que existe un entorno abierto  $I$  de  $t_0$  en  $B$  tal que  $\varpi^{-1}(I)$  se encuentre en la unión de un número finito de  $\{U'_j\}$  la cual supondremos, sin pérdida de generalidad sea  $U'_1, \dots, U'_l$ . Sea  $U_j = U'_j \cap M_{t_0}$  para cada  $j$ . Luego  $t \in I$ . Con esto verificamos la existencia de  $I \subset B$  cumpliendo las condiciones dadas en la definición anterior.

Entonces por construcción,  $M_t$  es una variedad compleja conexa compacta obtenida por pegar los polidiscos  $\{\mathfrak{U}_j \times \{t\} \cong \mathfrak{U}_j : j = 1, \dots, l\}$  via las funciones transición  $\{f_{jk}(z_k, t)\}$  (que depende holomórficamente de las variables  $z_k$ ) y por tanto los puntos  $z_j \in \mathfrak{U}_j$  y  $z_k \in \mathfrak{U}_k$  representan el mismo punto de  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  si y solo si  $z_j = f_{jk}(z_k, t)$ .

De esta manera, se puede ver que la restricción de  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  a  $I \subset B$ , que da la familia analítica compleja  $(\mathcal{M}_I, I, \varpi)$ , se compone de fibras que son todas variedades complejas compactas obtenidas por pegar los mismos polidiscos  $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_l\}$  pero con las funciones de transición  $f_{jk}(z_k, t)$  que depende analíticamente del parámetro  $t \in I$ . Luego, llamamos a la variedad compleja conexa compacta  $M_t = \varpi^{-1}(t)$ , para cada  $t \in I$ , una deformación  $C^\infty$  de la estructura compleja de  $M$ . La variedad  $\mathcal{M}$  es llamada espacio total de deformaciones  $C^\infty$  de estructuras complejas de  $M$ , y  $B$  es llamado el espacio de parámetros o espacio base.

Y se puede observar que estos polidiscos son en sí mismos independientes del parámetro  $t \in I$  y solo la forma en que se pegan entre sí dependen de  $t \in I$  a fin de determinar diferentes deformaciones de estructuras complejas sobre cualquier fibra (elegida)  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ ,  $t_0 \in I \subset B$ .

**Observación 2.1.1.** *Se dice que las familias analíticas complejas  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  y  $(\mathcal{N}, B, \sigma)$  son **equivalentes** si existe un biholomorfismo*

$$\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

*tal que para cada  $t \in B$ , la restricción*

$$\Phi| : M_t \rightarrow N_t$$

*también es un biholomorfismo, donde  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  y  $N_t = \sigma^{-1}(t)$ .*

Cuando las familias  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  y  $(\mathcal{N}, B, \sigma)$  son equivalentes, consideraciones elementales muestran que  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  puede ser pensado como la familia analítica compleja  $(\mathcal{N}, B, \sigma)$  dotado de un conjunto de nuevas coordenadas complejas locales de  $\mathcal{M}$ .

**Definición 2.3.** *Sean  $M$  y  $N$  variedades complejas compactas. Se dice que  $M$  es una deformación de  $N$ , si existe una familia analítica compleja tal que  $M, N \subset \{M_t/t \in B\}$ , cumple  $M_{t_0} = M$ ,  $M_{t_1} = N$ .*

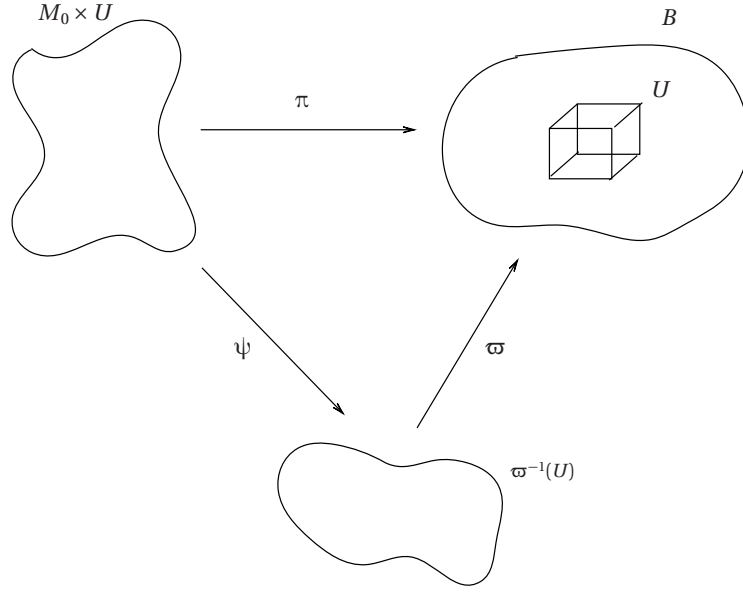
Sea  $B$  un dominio de  $\mathbb{R}^m$  y  $\varpi : \mathcal{M} \rightarrow B$  una aplicación  $C^\infty$  tal que  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  es una familia analítica compleja. Luego por el teorema de la sumersión [6], existe un sistema de coordenadas locales de  $\mathcal{M}$ ,  $\{x_1, \dots, x_j, \dots\}$  que satisface:

1.  $x_j(p) = (x_j^1(p), \dots, x_j^n(p), t_1, \dots, t_m)$
2.  $\{\mathcal{U}_j : j = 1, 2, \dots\}$  forma un cubrimiento abierto localmente finito de  $\mathcal{M}$ , donde  $\mathcal{U}_j$  es el dominio de  $x_j$ .

Así,  $\mathcal{M}$  es una variedad diferenciable.

**Teorema 2.1** (Teorema de Ehresmann [3]). *Sea  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja y  $0 \in B \subset \mathbb{R}^m$ , entonces existen:*

- *Un cubo abierto  $U = \{t : |t_1| < r, \dots, |t_m| < r\}$ , tal que su clausura  $\bar{U} \subset B$ , y*



- Un difeomorfismo  $\psi: M_0 \times U \rightarrow \varpi^{-1}(U)$  tal que  $\varpi \circ \psi = \pi$ , donde  $\pi: M_0 \times U \rightarrow U$  es la proyección sobre  $U$ .

*Demostración.* Por inducción, suponga  $m = 1$  entonces,  $B \subset \mathbb{R}$ ,  $U = ]-r, r[$  es un intervalo de  $\mathbb{R}$ , donde  $[-r, r] \subset B$  y  $(x_j, t_1) := (x_j^1, \dots, x_j^n, t_1)$ , primero construimos un campo vectorial  $C^\infty$  sobre  $\mathcal{M}$ , la cual es dado en cada  $\mathcal{U}_j$ , como

$$v_j(x_j, t_1) = \sum_{\alpha=1}^m v_j^\alpha(x_j, t_1) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_1} \quad (2.1)$$

Denotemos al campo vectorial  $\frac{\partial}{\partial t_1}$  sobre  $\mathcal{U}_k$  por  $(\frac{\partial}{\partial t_1})_k$ , luego bajo la transformación de coordenadas  $x_j^\alpha = f_{jk}^\alpha(x_k^1, \dots, x_k^m, t_1)$ , tenemos

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_k = \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_j, t_1)}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_j \quad (2.2)$$

sobre  $\mathcal{U}_{jk}$ , seguidamente como  $\mathcal{M}$  es compacto y  $\{\mathcal{U}_j\}$  un cubrimiento localmente finito, existe  $\{\rho_j(x_j, t_1)\}$  una partición de la unidad subordinada<sup>1</sup> a  $\mathcal{U}_j$  (es decir  $\rho_j \equiv 0$  en  $\mathcal{M} \setminus \mathcal{U}_j$ ), entonces

$$\sum_j \rho_j(x_j, t_1) \left(\frac{\partial}{\partial t_1}\right)_j \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>Si  $M$  es una variedad diferenciable, una partición de la unidad de  $M$  es una familia de funciones  $\{f_i\}$ ,  $C^\infty$  y se dice subordinada a un recubrimiento  $\{\mathcal{U}_j\}$ , si para todo  $i$  existe un  $j$  tal que el soporte de  $f_i$ , (denotado por  $\text{supp}(f_i)$ ) es la clausura del subconjunto de  $M$  en que  $f_i$  no se anula, está contenido en  $\mathcal{U}_j$ .



es un campo vectorial sobre  $\mathcal{M}$ , luego tenemos (si ponemos  $\rho_k(x_k, t_1) \equiv \rho_k$ )

$$\begin{aligned} \sum_k \rho_k \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)_j &= \sum_k \rho_k \left( \sum_{\alpha=1}^n \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_k, t_1)}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} + \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)_k \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^n \left( \sum_{j=k} \rho_k \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_k, t_1)}{\partial t_1} + \sum_{j \neq k} \rho_k \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_k, t_1)}{\partial t_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} + \sum_k \rho_k \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)_k \end{aligned}$$

Esto es

$$\sum_k \rho_k \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)_j = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j \neq k} \rho_k \left[ \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_k, t_1)}{\partial t_1} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} + \left( \frac{\partial}{\partial t_1} \right)_k \right]$$

un campo vectorial sobre  $\mathcal{U}_{jk}$ , por lo tanto el campo vectorial dado por (2.3) lo podemos poner (sobre  $\mathcal{M}$ ), como

$$v_j^\alpha(x_j, t_1) = \sum_{j \neq k} \rho_k(x_k, t_1) \frac{\partial f_{jk}^\alpha(x_k, t_1)}{\partial t_1} \quad (2.4)$$

Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de este campo

$$\begin{cases} \frac{dx_j^\alpha}{dt} = v_j^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^n, t_1), & \alpha = 1, 2, \dots, m \\ \frac{dt_1}{dt} = 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

para cualquier punto  $(\zeta_i, 0) = (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^n, 0) \in \mathcal{M}_0 = \varpi^{-1}(0)$ , cuyas condiciones iniciales son

$$\begin{cases} x_k^\alpha(0) = \zeta_i^\alpha, & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ t_1(0) = 0 \end{cases}$$

entonces existe una única solución de (2.5) dado por

$$\begin{cases} x_k^\alpha = \zeta_i^\alpha(\zeta_i, t), & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ t_1(t) = t \end{cases}$$

así  $t \mapsto (x_k^1(\zeta_i, t), \dots, x_k^n(\zeta_i, t), t)$ ,  $-r < t < r$ , es una curva regular alrededor de  $(\zeta_i, 0)$  sobre  $M_0 = M_0 \times \{0\}$  bajo la notación  $(\zeta_i, 0) = (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^n)$  y  $M_0 \times U \ni ((\zeta_i, 0), t) \equiv (\zeta_i, t)$  donde

$$\begin{array}{ccc} (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^n, t) \in M_0 \times U & \xrightarrow{\psi} & (x_k^1, \dots, x_k^n, t) \in \varpi^{-1}(U) \\ & \searrow \pi \quad \swarrow \varpi & \\ & t \in U \subset \mathbb{R} & \end{array}$$

se puede apreciar que  $\varpi \circ \psi(\zeta_i, t) = \varpi(x_k^1(\zeta_i, t), \dots, x_k^n(\zeta_i, t), t) = t = \pi(\zeta_i, t)$  es decir  $\varpi \circ \psi = \pi$  y como  $\varpi$  es diferenciable en su restricción y  $\pi$  es sobreyectiva, se tiene que  $\psi$  es diferenciable, entonces  $M_0 \times U \cong \varpi^{-1}(U)$ .

Pasemos a ver el caso general, cuando la dimensión de  $B$  es  $m$ , sea la hipótesis inductiva como sigue

$$U^{m-1} = \{(t_1, \dots, t_{m-1}) \in B^{m-1} : |t_i| < r, i = 1, 2, \dots, m-1\},$$

donde  $M_0 \times U^{m-1} = \varpi^{-1}(U^{m-1})$ , y defina  $U_m = \{t_m \in B / |t_m| < r\} \subset \mathbb{R}$ , donde  $U = U^{m-1} \times U_m$ . Se expresa  $M_0 \times U = M_0 \times U^{m-1} \times U_m = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$ , y sólo se prueba que  $\varpi^{-1}(U) = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$ .

Dado  $p \in \mathcal{M}$ ,  $\varpi(p) = (t_1, \dots, t_{m-1}, t_m)$  defina  $\varpi_m : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  por  $\varpi_m(p) = t_m$  que es  $C^\infty$  y aplica  $\varpi^{-1}$  en  $U$ , ( $\varpi^{-1}|_{\varpi^{-1}(U)} : \varpi^{-1}(U) \rightarrow U_m$ ) y denotemos la proyección  $\pi_m$  como  $\pi_m : \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m \rightarrow U_m \subset \mathbb{R}$ , tenemos

$$\begin{array}{ccc} (x_j^1, \dots, x_j^n, t_1, \dots, t_m) & \xrightarrow{\psi_m} & \varpi^{-1}(U) \\ & \searrow \pi_m & \swarrow \varpi \\ & & U_m \subset \mathbb{R} \end{array}$$

para construir una aplicación  $\psi_m$  de  $\varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m$  en  $\varpi^{-1}(U)$  procedemos como en la primera parte, consiguiendo el siguiente campo vectorial (sobre

$\mathcal{U}_{jk}$ ) respecto a la partición de la unidad,

$$\sum_j \rho_j \left( \frac{\partial}{\partial t_m} \right)_j = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{j \neq k} \rho_j \frac{\partial f_{jk}^\alpha}{\partial t_m} \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} + \left( \frac{\partial}{\partial t_m} \right)_k$$

luego obtenemos, como en (2.4),

$$\sum_{\alpha}^n v_j^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^n, t_1, \dots, t_m) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_m}$$

el campo vectorial  $C^\infty$  sobre  $\mathcal{M}$ , que al resolver su sistema de ecuaciones diferenciales correspondiente:

$$\begin{cases} \frac{dx_j^\alpha}{dt} = v_j^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^n, t_1, \dots, t_m), & \alpha = 1, 2, \dots, n \\ \frac{dt_\nu}{dt} = 0, & \nu = 1, 2, \dots, m-1 \\ \frac{dt_m}{dt} = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

Obtenemos el difeomorfismo  $\psi_m : \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m \rightarrow \varpi^{-1}(U)$  de manera que  $\varpi_m \circ \psi_m = \pi_m$ . Así se concluye que  $\varpi^{-1}(U) = \varpi^{-1}(U^{m-1}) \times U_m = M_0 \times U$ , que es lo que queríamos demostrar.  $\square$

Aplicando el Teorema 2.1 a la familia analítica compleja  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  obtenemos el siguiente corolario:

**Corolario 2.1.** *Sea  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja,  $c$  un punto arbitrario de  $B$  y  $M_c = \varpi^{-1}(c)$ . Para un polidisco lo suficientemente pequeño  $U(c)$  con centro en  $c$ , existe  $\psi_c : M_c \times U(c) \rightarrow \varpi^{-1}(U(c))$  tal que  $\varpi \circ \psi_c = \pi_c$  donde  $\pi_c : M_c \times U(c) \rightarrow U(c)$ .*

$$\begin{array}{ccc} M_c \times U(c) & \xrightarrow{\psi_c} & \varpi^{-1}(U(c)) \\ & \searrow \pi_c & \nearrow \varpi_c \\ & U(c) & \end{array}$$

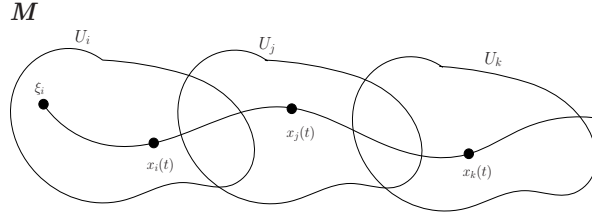
*Demostración.* Basta observar que  $M_c$  es difeomorfo a  $M_0$  y que  $U(c)$  es difeomorfo a  $U$ , y luego usar el Teorema 2.1.  $\square$

**Definición 2.4.** *Decimos que todas las deformaciones, lo suficientemente pequeñas, tienen una cierta propiedad  $\mathcal{P}$ , si para cualquier familia analítica compleja  $\{M_t/t \in B\}$  con  $M_{t_0} = M$ , podemos encontrar una vecindad  $I$ , con  $t_0 \in N \subset B$  tal que  $M_t$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , para cada  $t \in I$ .*

A continuación daremos un teorema cuya es que, dados cualquier par de fibras asociadas al fibrado tangente de una variedad compleja compacta de la familia analítica compleja dada, estas son difeomorfas.

**Teorema 2.2.** Sea  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja de variedades complejas compactas  $\{M_t/t \in B\}$ , y  $t_0$  cualquier punto de  $B$ , entonces  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  es difeomorfo a  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$ , para cualquier  $t \in B$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable (arbitraria), con sistema de coordenadas locales  $\{x_1, x_2, \dots, x_j, \dots\}$ , y cubrimiento arbitrario localmente finito  $\{\mathcal{U}_j/j = 1, 2, \dots\}$  tal que  $x_j : p \mapsto (x_j^1(p), \dots, x_j^m(p)) = x_j(p)$ , donde el cambio de coordenadas está dado por  $x_j^\alpha(p) = f_{jk}^\alpha(x_k^1(p), \dots, x_k^m(p))$ , con  $\alpha = 1, \dots, m$ ,



se construye (localmente)  $v_j = (v_j^1, \dots, v_j^m) = (\dot{x}_j^1(t), \dots, \dot{x}_j^m(t)) = \dot{x}_j(t)$  vector tangente sobre un abierto de  $\mathcal{M}$ , con su cambio de coordenadas

$$v_j^\alpha = \sum_{\beta=1}^m \frac{\partial x_j^\alpha}{\partial x_k^\beta} v_k^\beta$$

y como no depende de ésta, tenemos que

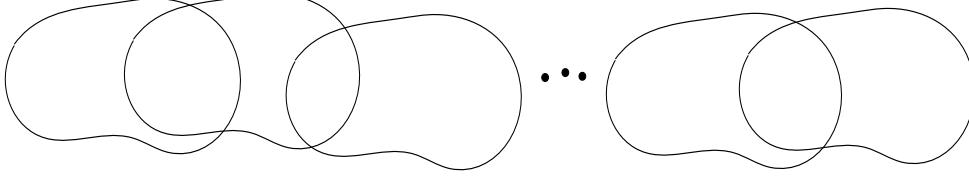
$$\sum_{\alpha=1}^m v_j^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha} = \sum_{\alpha=1}^m v_k^\alpha \frac{\partial}{\partial x_k^\alpha} \quad (2.7)$$

Si un vector tangente  $v(x_j) = \sum_{\alpha=1}^m v_j^\alpha(x_j) \frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}$  es asignado a cada punto  $x_j$  de  $\mathcal{M}$ , llamaremos a  $v(x_j)$  un campo vectorial  $C^\infty$  (es decir todo  $v_j^\alpha(x_j)$  es  $C^\infty$ ), además  $v(x_j) \neq 0$  en cada punto de  $\mathcal{M}$ , luego asociemos un sistema de ecuaciones diferenciales

$$\left\{ \frac{dx_j^\alpha}{dt} = v_j^\alpha(x_j^1, \dots, x_j^m), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \right. \quad (2.8)$$

la cual tiene una única solución  $x_j^\alpha = x_j^\alpha(t)$  en todas las condiciones iniciales dadas  $x_j^\alpha(0) = \zeta_i^\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ , y denotemos esta solución por  $x_j^\alpha(t, \zeta_i)$  (función  $C^\infty$  de  $t$ ) con  $\zeta_i = (\zeta_i^1, \dots, \zeta_i^m)$ . Ya que el sistema de ecuaciones (2.8) es invariante bajo la transformación de coordenadas por (2.7), su solución  $x_j^\alpha(t, \zeta_i)$  da una curva suave  $t \mapsto x_j(t, \zeta_i) = (x_j^1(t, \zeta_j), \dots, x_j^m(t, \zeta_j))$  en  $\mathcal{M}$  partiendo del punto  $\zeta_i \in \mathcal{M}$ .

Entonces por corolario 2.1,  $\psi_c|_{M_c \times \{t\}} : M_c \times \{t\} \rightarrow \varpi^{-1}(t) = M_t$  es un difeomorfismo, luego para todo  $t \in U(c)$ ,  $M_c$  es difeomorfo a  $M_t$ . Dado cualesquiera  $t_0, t \in B$ , podemos escoger polidiscos  $U(c_0), \dots, U(c_l)$  como en el teorema (2.1) tal que  $t_0 \in U(c_0)$ ,  $t \in U(c_l)$ , además que  $U(c_j) \cap U(c_{j-1}) \neq \emptyset$ , para  $j = 0, 1, \dots, l$ . Entonces  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  es difeomorfo a  $M_t = \varpi^{-1}(t)$



$$M_{c_0} \cong M_{t_0} \cong M_{c_1} \cong M_{t_1} \cong \dots, M_t \cong M_{c_l} \cong \text{entonces } M_{t_0} \cong M_t \quad \square$$

Sea  $M$  una variedad compleja conexa compacta y  $(\mathcal{M}, B, \varpi)$  una familia analítica compleja de variedades complejas conexas compactas con  $M \cong M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  para algún  $t_0 \in B$ . Entonces existe un dominio  $I \subset B$  conteniendo a  $t_0$ , de manera que al fijar  $t_0 \in B$  la variedad  $M_{t_0} = \varpi^{-1}(t_0)$  sea obtenida por pegar polidiscos  $V_1, \dots, V_l$  identificando  $z_k \in V_k$  y  $z_j = f_{jk}(z_k) \in V_j$  via las funciones transición  $\{f_{jk}\}$  que surja de un determinado sistema finito de coordenadas complejas locales  $\{(U_j, z_j) : j = 1, \dots, l\}$ , es decir  $z_j(U_j) = V_j$  y  $f_{jk} = z_j \circ z_k^{-1}$ , entonces para cada  $t \in I$ ,  $M_t = \varpi^{-1}(t)$  es una variedad compleja compacta obtenida por pegar los mismos polidiscos  $V_1, \dots, V_l$  pero por diferentes funciones transición

$$f_{jk}^\alpha(z_k, t) = f_{jk}^\alpha(z_k, t_1, \dots, t_m)$$

con al condición inicial  $f_{jk}^\alpha(z_k, t_0) = f_{jk}^\alpha(z_k)$  donde  $t = (t_1, \dots, t_m)$  son coordenadas locales  $C^\infty$  sobre  $I$  y las funciones  $f_{jk}^\alpha(z_k, t)$  son funciones  $C^\infty$  de  $t$ . Llamamos a la variedad compleja conexa compacta  $M_t = \varpi^{-1}(t)$ , para cada  $t \in I$ , una deformación  $C^\infty$  de estructura compleja de  $M$ .

La variedad  $\mathcal{M}$  es llamado el espacio total de deformaciones  $C^\infty$  de estructuras complejas de  $M$  y  $B$  es llamado el espacio de parámetros o espacio base.

### 2.1.1. Automorfismos y Espacio Cociente

Antes, veamos algunas definiciones preliminares:

**Definición 2.5.** Sea  $G$  un grupo dotado con una topología de tal manera que las aplicaciones producto e inversión de la operación de grupo,  $\mu : G \times G \rightarrow G$  y  $t : G \rightarrow G$  dadas por:

$$\mu(gh) = gh; \quad t(g) = g^{-1}$$

son continuas, entonces se dirá que  $G$  es un grupo topológico. Además se dirá que  $G$  es un grupo discreto si es un grupo topológico que tiene la topología discreta.

Todo grupo puede ser convertido en un grupo topológico si es dotado con la topología discreta.

**Ejemplo 2.1.** *Cada uno de los siguientes grupos es un grupo topológico:*

1. *La recta real  $\mathbb{R}$  con la estructura de grupo aditivo y la topología euclídea.*
2. *El conjunto  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  de números reales diferentes del cero con la multiplicación, y la topología relativa de  $\mathbb{R}$ .*
3. *El conjunto  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  de números complejos diferentes al cero bajo la multiplicación compleja, con la topología relativa de  $\mathbb{C}$ .*
4. *El grupo lineal general  $GL(n, \mathbb{R})$ , que es el conjunto de matrices reales inversibles de  $n \times n$  con la multiplicación de matrices, con la topología heredada de  $\mathbb{R}^{n^2}$ .*
5. *Cualquier grupo dotado con la topología discreta.*

**Definición 2.6.** *Sea  $X$  un espacio topológico y  $G$  un grupo topológico. Una acción continua de  $G$  en  $X$  es una aplicación continua  $\theta : G \times X \rightarrow X$ , tal que satisface las siguientes dos condiciones:*

1.  *$\theta(e, x) = x$  para todo  $x \in X$ , donde  $e$  es la identidad de  $G$  y*
2.  *$\theta(g_1, \theta(g_2, x)) = \theta(g_1 g_2, x)$  para todo  $x \in X$  y  $g_1, g_2 \in G$ .*

*Para simplificar la notación, se denota  $\theta(g, x)$  por  $g \cdot x$ .*

**Definición 2.7.** *Sea  $G$  un grupo, dada una acción en  $X$ , se define la órbita de  $x \in X$  como el conjunto  $G \cdot x = \{g \cdot x, \forall g \in G\}$ .*

Con el concepto de órbita de un elemento, se puede hablar del espacio cociente  $X/G$ , cuyos elementos son las órbitas de la acción.

### 2.1.2. Automorfismo en variedades complejas.

Sea  $W$  una variedad compleja, un **automorfismo** de  $W$  será la aplicación biholomorfa de  $W$  en si misma, en otras palabras, un automorfismo es una aplicación que no altera la estructura compleja de  $W$ . Cuando definimos el producto de dos automorfismos  $g_1, g_2$  de  $W$  como su composición  $g_1 \circ g_2$ , el conjunto de todos los automorfismos de  $W$  forma un grupo, la cual denotamos por  $\mathcal{G}$ . La unidad de este grupo es la identidad en  $W$ , y la inversa de  $g \in \mathcal{G}$  es la aplicación inversa  $g^{-1}$  de  $g$ .

Ahora, sea  $G$  un grupo de automorfismos de  $W$ . Para  $p \in W$ , el conjunto  $G_p = \{g(p) : g \in G\}$  es llamado la órbita de  $G$  alrededor de  $p$ . Dos órbitas  $G_p$  y  $G_q$  no tienen un elemento en común a menos que ellos coincidan. Es así que  $W$  se descompone en órbitas mutuamente disjuntas de  $G$ .

Luego, al conjunto de todas las órbitas de  $G$  se le llama el espacio cociente de  $W$  por  $G$ , denotado por  $\hat{W} = W/G$ , obtenido de  $W$  identificando  $p \in W$  con  $q \in W$  si existe un elemento  $g \in G$  tal que  $q = g(p)$ .

Es decir, asumiendo la acción  $C^\infty$ ,  $\theta : G \times M \rightarrow M$ . Definimos la relación  $\sim$  sobre  $M$  por  $p \sim q$  si para algún  $g \in G$  tenemos  $q = \theta_g(p) = gp$ . Fácilmente se puede ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia y que las clases de equivalencias coinciden con las órbita de  $G$ . En efecto,  $p \sim p$  pues  $p = ep$  y  $p \sim q$  mediante  $q = gp$ , lo que implica  $p = g^{-1}q$  o  $q \sim p$ , de modo la que la relación es reflexiva y simétrica. Finalmente, dado que  $p \sim q$  y  $q \sim r$  tenemos que tener  $q = gp$  y  $r = hq$  de modo que  $r = (hg)p$  y luego  $p \sim r$ . Obviamente,  $p \sim q$  implica que  $p$  y  $q$  están en la misma órbita, por lo que la clase de equivalencia  $[p] \subset G_p$ . A la inversa, si  $q \in G_p$ , entonces  $p \sim q$  así  $G_p \subset [p]$ .

Se define la *Topología Cociente* de  $\hat{W} = W/G$ , un subconjunto  $\hat{U}$  de  $\hat{W}$  es un abierto si y sólo si su imagen inversa para la aplicación  $p \mapsto \hat{p} = G_p$  es abierta en  $W$ . Así  $\hat{U}_r(\hat{q}) = \{\hat{p} : p \in U_r(q)\}$  es un conjunto abierto de  $\hat{W}$ , para  $U_r(q) = \{p : |z_q^1(p)| < r, \dots, |z_q^n(p)| < r\}$  dado  $q \in W$  y  $r > 0$ , luego la aplicación  $p \mapsto \hat{p}$  aplica  $U_r(q)$  homeomórficamente en  $\hat{U}_r(\hat{q}) = \{\hat{p} : p \in U_r(q)\}$ . De esta manera  $\hat{W}$  es una variedad topológica.

**Ejemplo 2.2.** Cuando  $M = \mathbb{R}^n$  y  $G = \{X \in GL(n, \mathbb{R}) : X^t \cdot X = Id\}$  el subgrupo de matrices ortogonales  $n \times n$ , actúa naturalmente como un subgrupo de  $GL(n, \mathbb{R})$ , se tiene que las órbitas corresponden a esferas concéntricas y por lo tanto son una a una en correspondencia con los números reales  $r \geq 0$  por la aplicación que asigna a cada esfera, su radio. Así hay un homeomorfismo de  $\mathbb{R}^n/G$  y el rayo  $0 \leq r < \infty$ ; pero éste cociente no es una variedad.

En general, el espacio cociente  $W/G$  de una variedad compleja no es siempre una variedad compleja. Con el fin de que  $W/G$  pueda ser una variedad compleja,  $G$  debe satisfacer ciertas condiciones. Que veremos en la siguiente sección, donde daremos algunos ejemplos.

## 2.2. Ejemplos de Deformaciones

El Teorema 2.3 que presentamos a continuación, nos brinda un método para construir una variedad compleja compacta como el espacio cociente de una variedad compleja dada. Pero antes veamos la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.** Sea  $G$  un grupo de automorfismos de una variedad compleja  $W$ . Si la acción de  $G$  en  $W$  es

- (a) Propiamente discontinua: para cualquier par de compactos  $K_1$  y  $K_2$  de  $W$ , existe un número finito de elementos  $g \in G$  tal que  $g(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset$ , y
- (b) Libre de puntos fijos: para cualquier  $g \in G$  excepto la identidad,  $g(p) \neq p$ .

entonces las órbitas de la acción son subvariedades (complejas) de  $W$ .

*Demostración.* Antes de iniciar la demostración de la proposición, se afirma que:

- (a.1) Ser propiamente discontinua es equivalente a decir que para cada punto  $p \in W$ , existe  $U_p$ , un entorno abierto (relativamente compacto) de  $p$  tal que  $\forall g \in G$ , se tiene que  $g(U_p) \cap U_p = \emptyset$ .

Sea  $p \in M$ , entonces existen vecindades  $U$  y  $V$  de  $p$  tales que  $g(U) \cap V = \emptyset$  excepto para un número finito de elementos, sean ellos  $g_0 = e, g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ . Ya que la acción es libre de puntos de fijos y  $M$  es Hausdorff, para cada  $g_i$  existen vecindades disjuntas  $W_i$  de  $p$  y  $W'_i$  de  $g_i \cdot p$ . Sea

$$U' = U \cap V \cap W_1 \cap (g_1^{-1}W'_1) \cap \dots \cap W_k \cap (g_k^{-1}W'_k)$$

Se mostrará que  $U'$  tiene las propiedades requeridas, en efecto, primero considérese  $g = g_i$  para algún  $i \geq 1$ . Si  $p \in U' \subseteq g^{-1}W'_1$ , entonces  $g_i \cdot p \in W'_i$ , el cual es distinto de  $W_i$  y por lo tanto de  $U'$ . Así  $g(U') \cap U' = \emptyset$ . Por otro lado, si  $g \in G$  no es la identidad y no es alguno de los  $g_i$ , entonces para cualquier  $p \in U' \subseteq U$ , se tiene que  $g \cdot p \in g(U')$ , el cual es disjunto con  $V$  y por lo tanto también de  $U$ . Análogamente al contrario, de esta manera queda mostrada (a.1).

- (a.2) las órbitas de la acción son subvariedades de  $W$ .

En efecto, como  $G$  actúa propiamente discontinua sobre la variedad compleja  $W$ , podemos encontrar un atlas tal que si  $q \in W$  y  $g \in G$ ,  $g \neq 1$ , entonces  $g(U_q) \cap U_q = \emptyset$  además que  $G_p \cap U_q = \{p\}$  para cualquier  $p \in U_q$ . Luego  $\rho : p \mapsto \hat{p} = G_p$  es inyectiva en  $U_q$ . Por definición de topología cociente  $\rho$  es una aplicación abierta en  $W$ , considere  $U_{\hat{q}} = \{\hat{p} : p \in U_q\}$  un abierto en  $W/G$ . Se tiene que un abierto del conjunto  $G_p$  será la intersección de éste con una carta de  $W/G$ ; y como  $\rho$  aplica  $U_q$  homeomórficamente en  $U_{\hat{q}}$ , la aplicación  $z_j : \hat{p} \mapsto z_j(\hat{p})$  definida por  $z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p)$  para  $p \in U_q$  es un homeomorfismo de  $U_{\hat{q}}$  en  $\mathbb{C}^n$ , su restricción lo será también para  $G_p$ . Y en una vecindad lo suficientemente pequeña de la intersección de dos abiertos de  $\hat{p}_0$ , se tiene que  $z_j(\hat{p}) \mapsto z_k(\hat{p})$  es un biholomorfismo, así forma un sistema coordenado para  $G_p$ , y de esta manera (a.2) queda mostrado.  $\square$

Si  $G$  es propiamente discontinua, entonces cada órbita  $G_p$  es un subconjunto discreto de  $W$ . Veamos el siguiente ejemplo como ilustración:

**Ejemplo 2.3.** Sea  $M = S^1$  y sea la acción de  $G$  como potencias de una rotación irracional, es decir, la acción rota por  $a/2\pi$  con  $a$  irracional. Esto es, se tiene la acción  $(n, e^{2\pi it})$  a  $e^{2\pi i(t+na/2\pi)}$ . Esta acción es libre de puntos fijos, pero no es propiamente discontinua, en efecto considere el compacto  $K = \{e^{2\pi it} \in S^1 : 0 \leq t \leq 1/4\}$ , ahora hay infinitos  $n \in \mathbb{Z}$  tales que  $nK \cap K \neq \emptyset$

La acción propiamente discontinua obliga a la órbita  $G_p$  a ser un subconjunto discreto de  $M$  (para cualquier  $p$ ). Sin embargo, hay acciones libres con órbitas discretas que no son propiamente discontinuas.

**Teorema 2.3.** Sea  $G$  un grupo de automorfismos de una variedad compleja  $W$ . Si la acción de  $G$  en  $W$  es propiamente discontinua y libre de puntos fijos entonces



(a) las órbitas de la acción son subvariedades de  $W$

(b) el espacio cociente  $W/G$  tiene la estructura canónica de una variedad compleja, inducida por  $W$ .

*Demostración.* Sólo se demostrará la parte (b), porque la proposición (2.1) implica la primera parte del teorema.

Para cada  $q \in W$ , se considera un sistema de coordenadas  $(z_q^1, \dots, z_q^n)$  con centro en  $q$  y se elige  $r > 0$  de modo que el polidisco

$$V = \{(z_q^1(p), \dots, z_q^n(p)) : |z_q^k(p)| \leq r, k = 1, \dots, n\}$$

esté contenido en el rango de  $z_q(U_r(q))$ . Con esto se define

$$U_r(q) = \{p : |z_q^1(p)| < r, \dots, |z_q^n(p)| < r\}.$$

(a.1) Existe  $r > 0$  tal que  $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$ , para cualquier  $g \in G$  distinto de la identidad.

En efecto, si (a.1) no es verdad existe  $g_n \in G$ , distinto de la identidad, tal que  $g_n(U_n) \cap U_n \neq \emptyset$  donde  $U_n = U_{r/n}(q)$  para cada  $n = 1, 2, \dots$  luego se tiene que  $g_n(U_1) \cap U_1 \neq \emptyset$  para cualquier  $n$ .

Como la clausura de  $U_1$  es compacta y  $G$  es propiamente discontinua, entonces existen  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  un subconjunto finito de  $G$ , y podemos encontrar un  $g_i$ , digamos,  $g_1$  tal que  $g_1(U_n) \cap U_n \neq \emptyset$  para un número infinito  $n$ . Por lo tanto  $g_1(q) = q$ , es decir que  $q$  es un punto fijo, pero eso contradice la hipótesis. En consecuencia para  $n$  suficientemente grande  $g(U_n) \cap U_n = \emptyset$  para cualquier  $g \in G$  distinto de la identidad. Entonces, escribimos simplemente  $r$  en vez de  $r/n$  y tenemos  $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$ . Lo que prueba (a.1).

(a.2) Existe  $r > 0$  tal que  $G_p \cap U_r(q) = \{p\}$  para todo  $p \in U_r(q)$ ,

En efecto, por (a.1), se tiene que  $g(U_r(q)) \cap U_r(q) = \emptyset$  para  $g \in G$  distinto de la identidad,  $g \neq 1$ , entonces si se toma  $r > 0$  lo suficientemente pequeño,  $G_p \cap U_r(q) = \{p\}$  para cualquier  $p \in U_r(q)$ . Esto muestra (a.2).

Para el conjunto  $U_r(q)$  dado en (a.2), la restricción de la proyección  $\psi(p) = G_p$ ,

$$\psi| : U_r(q) \rightarrow W/G$$

es inyectiva. Más aún:

(a.3)  $\psi| : U_r(q) \rightarrow W/G$  es un homeomorfismo entre abiertos.

Por otro lado, el conjunto  $V_r(G_q) = \{G_p : p \in U_r(q)\} \subset W/G$  es abierto; en efecto, tenemos que

$$\psi^{-1}(V_r(G_q)) = \{p \in W : \psi(p) \in V_r(G_q)\} = \{p \in W : G_p \subset V_r(G_q)\} = U_r(q)$$

se sigue que  $V_r(G_q)$  es abierto en  $\hat{W}$  (por definición de topología cociente). Entonces  $\psi$  aplica  $U_r(q)$  homeomórficamente sobre  $V_r(G_q)$  y esto muestra (a.3). Por tanto  $W/G$  es una variedad topológica.

(b)  $W/G$  tiene la estructura canónica de una variedad compleja, inducida por  $W$ .

Para cada punto  $q \in W$ , fijemos un polidisco coordenado  $U_r(q)$  con  $r = r(q)$  satisfaciendo las condiciones anteriores y escojamos polidiscos coordenados  $U_j(q_j)$  con  $0 < r_j \leq r(q_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , tal que  $\{U_j(q_j) : j = 1, 2, \dots\}$  forma un cubrimiento abierto localmente finito de  $W$ . Entonces  $\hat{W}$  es cubierto por  $\hat{U}_j = \{\hat{p} : p \in U_j(q_j)\}$ . Luego como  $\psi$  aplica  $U_j(q_j)$  homeomórficamente en  $\hat{U}_j$ , la aplicación  $z_j : \hat{p} \mapsto z_j(\hat{p})$  definida por

$$z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p) \quad \text{para } p \in U_j(q_j)$$

es un homeomorfismo de  $\hat{U}_j$  en  $\mathbb{C}^n$ . Veamos, el cambio de coordenadas, suponga  $\hat{U}_j \cap \hat{U}_k \neq \emptyset$ , y tomemos un punto arbitrario  $\hat{p}_0 \in U_j(q_j) \cap U_k(q_k)$  con  $p_0 \in U_j(q_j)$ . Entonces existe un único elemento  $g \in G$  tal que  $g(p_0) \in U_k(q_k)$ , y en una vecindad pequeña de  $\hat{p}_0$ , tenemos

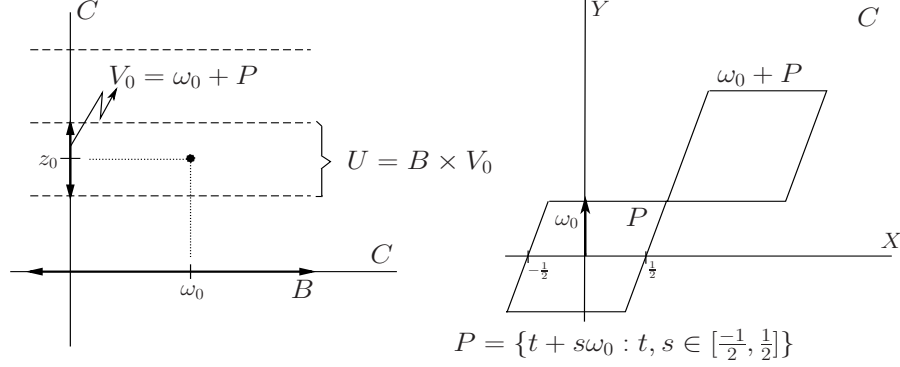
$$z_j(\hat{p}) = z_{q_j}(p), \quad z_k(\hat{p}) = z_{q_k}(g(p)), \quad p \in U_j(q_j)$$

puesto que  $g$  es biholomorfa, la aplicación  $z_j(\hat{p}) \mapsto z_k(\hat{p})$  también es biholomorfa. Así  $\{z_1, z_2, \dots\}$  forma un sistema de coordenadas complejas locales sobre  $\hat{W}$ , y define una estructura compleja sobre  $\hat{W}$ .  $\square$

### 2.2.1. El Toro Complejo

**Ejemplo 2.4.** Dado el toro complejo,  $T_\omega = \mathbb{C}/G$  donde  $G$  es el conjunto  $G = \{n + m\omega/n, m \in \mathbb{Z}, \text{Im}(\omega) > 0\}$ . Sea  $B = \{\omega/\text{Im}(\omega) > 0\} \subset \mathbb{C}$  y sea  $\mathcal{G} = \{g_{mn} : (w, z) \mapsto (w, z + m\omega + n) : m, n \in \mathbb{Z}, \text{Im}(\omega) > 0\}$  un grupo de transformaciones propiamente discontinuas y libre de puntos fijos en  $B \times \mathbb{C}$ , construimos  $\mathcal{M} = (B \times \mathbb{C})/\mathcal{G}$  una variedad compleja, de tal manera que  $\{T_w/w \in B\}$  es una familia analítica compleja.

Primero demostremos que  $\mathcal{G}$  es propiamente discontinua, usando la equivalencia dada en la demostración de la proposición (2.1), para ello tomemos  $(\omega_0, z_0) \in B \times \mathbb{C}$  (fijo), y  $U \subset B \times \mathbb{C}$  un entorno abierto (y relativamente compacto) de  $(\omega_0, z_0)$ , de manera que podamos suponer,  $\exists g \in \mathcal{G}$  tal que  $g(U) \cap U \neq \emptyset$ ,



tomando a  $U = B \times V_0$  donde  $V_0 = \omega_0 + \mathcal{P}$  siendo  $\mathcal{P}$  el plano en  $\mathbb{C}$  definido como  $\mathcal{P} = \{t + s\omega_0 : t, s \in [-1/2, 1/2]\}$ , además que  $(\omega_0, z_0) \in U$  y  $g(\omega_0, z_0) \in U$ , pero como se tiene que  $g(\omega_0, z_0) = (\omega_0, z_0 + m\omega_0 + n)$ , entonces haciendo  $m$  y  $n$  lo suficientemente grande se llega a una contradicción ya que  $U$  es relativamente compacto, es así que, haciendo variar  $(\omega, z) \in B$  se consigue que  $\forall g \in \mathcal{G}$  distinto de la identidad, existe un entorno  $U$  de  $(\omega, z)$  tal que  $g(U) \cap U = \emptyset$ , por lo tanto  $\mathcal{G}$  es propiamente discontinua.

Pasaremos a probar que  $\mathcal{G}$  es libre de puntos fijos, es decir que para cualquier  $g \in \mathcal{G}$  diferente de la identidad no tiene puntos fijos, suponga entonces que tiene al menos un punto fijo, sea  $g \neq 1$  y tome  $(\omega, z) \in B \times \mathbb{C} \Rightarrow g(\omega, z) = (\omega, z + m\omega + n) \Rightarrow (\omega, z) = (\omega, z + m\omega + n)$  de esto obtenemos que  $0 = m\omega + n$  y se desprende dos casos: que  $m \neq 0$  ó  $m = 0$ , si  $m \neq 0 \Rightarrow \omega = \frac{-n}{m} \Rightarrow \text{Im}(\omega) = \text{Im}(\frac{-n}{m}) = 0$  y si  $m = 0 \Rightarrow n = 0$  en ambas hay contradicción.

De ahí tenemos que  $(B \times \mathbb{C})/\mathcal{G}$  es una variedad compleja usando la proposición (2.3); luego definimos la proyección  $\pi : B \times \mathbb{C} \rightarrow B$  que induce una aplicación holomorfa  $\varpi : \mathcal{M} \rightarrow B$ , y  $\varpi^{-1}(\omega) = T_\omega$ . Es más, se puede ver que el rango del jacobiano de  $\varpi$  es igual a la dimensión compleja de  $B$ , es decir 1, concluyendo que  $\{T_\omega/\omega \in B\}$  es una familia analítica compleja.

### 2.2.2. Curvas Elípticas

**Ejemplo 2.5.** Sea  $\mathbb{H} = \{\omega \in \mathbb{C} : \text{Im}(\omega) > 0\}$  semiplano superior complejo,  $\mathcal{G} = \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : g\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, a, b, c, d \in \mathbb{Z}; ad - bc = 1\}$ , grupo de transformaciones actuando sobre  $\mathbb{H}$ , considere  $\{T_\omega : \omega \in \mathbb{H}\}$  la familia analítica compleja (de curvas elípticas), siendo una vez más  $T_\omega = \mathbb{C}/G_\omega$ , y  $G_\omega = \{m\omega + n : m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

Probaremos que  $\mathcal{F} = \{\omega \in \mathbb{H} : |\text{Re}(\omega)| \leq 1/2 \wedge |\omega| \geq 1\}$  es un dominio

fundamental de  $\mathcal{G}$  y que dados  $\omega, \omega' \in \mathbb{H}$  tal que  $\exists g \in \mathcal{G}$  con  $\omega' = g(\omega)$  entonces  $T_\omega = T_{\omega'}$  biholomorficamente.

Observamos que  $\mathcal{G}$  identificado con  $SL_2(\mathbb{Z})$  es un subgrupo discreto de  $SL_2(\mathbb{R})$  el grupo de transformaciones lineales fraccionarias que actúa sobre  $\mathbb{H}$  por las transformaciones definidas, para  $z \in \mathbb{C}$ , como:

$$gz = \frac{az + b}{cz + d} \quad \wedge \quad g\infty = a/c = \lim_{z \rightarrow \infty} gz \quad (2.9)$$

llamadas transformaciones fraccionarias sobre la esfera de Riemann  $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  o conocida también como la línea proyectiva compleja  $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$ .

$\mathcal{F}$  es una región cerrada de  $\mathbb{H}$  (por lo general,  $\mathcal{F}$  también será simplemente conexa). Decimos que  $\mathcal{F}$  es un "Dominio Fundamental" para el subgrupo  $\mathcal{G}$  si todos los  $z \in \mathbb{H}$ , son  $\mathcal{G}$ -equivalentes a un punto en  $\mathcal{F}$ , pero no hay dos puntos distintos  $z_1, z_2$  en el interior de  $\mathcal{F}$  que sean  $\mathcal{G}$ -equivalentes (sólo a dos puntos de los límites se les permite ser  $\mathcal{G}$ -equivalentes, esto significa que  $\exists g \in \mathcal{G}$  tal que  $z_2 = g(z_1)$ ).

Probemos entonces que  $\mathcal{F}$  es un dominio fundamental de  $\mathcal{G}$ .

El grupo  $\mathcal{G}$  contiene dos transformaciones lineales fraccionarias que actúan como generadores para todo el grupo

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : z \rightarrow z + 1 \quad \wedge \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : z \rightarrow -1/z$$

Para probar que todo  $z \in \mathbb{H}$  es  $\mathcal{G}$ -equivalente a un punto en  $\mathcal{F}$ , la idea es usar la traslación  $T^j$  para mover un punto  $z$  hacia el interior de la franja  $-1/2 \leq |Re(z)| \leq 1/2$ , si este cae fuera de círculo y fuera de  $\mathcal{F}$ . De otro modo, si cae dentro del círculo unitario, usamos  $S$  para lanzar el punto fuera del círculo unitario, entonces para ponerlo dentro de la franja usamos la traslación  $T^k$ , y continuar de esta manera hasta obtener un punto dentro de la franja y fuera del círculo unidad. Veamos una prueba más precisa.

Sea  $z \in \mathbb{H}$  fijo, sea también  $\Gamma' \subset \mathcal{G}$  subgrupo generado por  $S$  y  $T$  (pronto veremos que  $\mathcal{G} = \pm \Gamma'$ ).

Si  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$  entonces  $Im(\gamma z) = \frac{Im(z)}{|cz + d|^2}$  en efecto,

$$\begin{aligned} Im(\gamma z) &= Im\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = Im\left[\frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{(cz + d)(c\bar{z} + d)}\right] \\ &= Im\left[\frac{(ac|z|^2 + bd) + (adz + bc\bar{z})}{|cz + d|^2}\right] \\ &= Im\left[\frac{(ac|z|^2 + bd)}{|cz + d|^2}\right] + Im\left[\frac{(adz + bc\bar{z})}{|cz + d|^2}\right] \end{aligned}$$

$$Im(\gamma z) = |cz + d|^{-2} Im(adz + bc\bar{z})$$

Por otro lado, considerando  $z = x + iy$  obtenemos que la  $Im(adz + bc\bar{z}) =$

$Im[(ad + bc)x + i(ad - bc)y] = (ad - bc)y = 1 \cdot y = Im(z)$ . Por lo tanto

$$Im(\gamma z) = |cz + d|^{-2} Im(z) \quad (2.10)$$

Ya que  $c$  y  $d$  son enteros, los números  $|cz + d|^2$  se limitan de cero. (Generalmente, como  $c$  y  $d$  varían en todo los enteros, los números complejos  $cz + d$  funcionan a través del enrejado generado por 1 y  $z$ , y existe un disco alrededor de cero que no contiene ningún punto del enrejado distinto de cero).

Así, existe algún  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma'$  tal que  $Im(\gamma z)$  es máximo.

Reemplazando  $\gamma$  por  $T^j \gamma$  para un cierto  $j$  conveniente, sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $\gamma z$  está en la franja  $-1/2 \leq |Re(z)| \leq 1/2$ . Pero luego, si  $\gamma z$  no estaba en  $\mathcal{F}$ , i.e. si tenemos  $|\gamma z| < 1$ , entonces por (2.10), tendríamos

$$Im(S\gamma z) = Im\left(\frac{\gamma z}{|\gamma z|^2}\right) > Im(\gamma z)$$

esto significa que  $S\gamma z$  tiene una parte imaginaria estrictamente mayor que  $\gamma z$ , lo que contradice la elección de  $\gamma \in \Gamma'$  que  $Im(\gamma z)$  sea máximo. Por lo tanto existe  $\gamma \in \Gamma'$  tal que  $\gamma z \in \mathcal{F}$ .

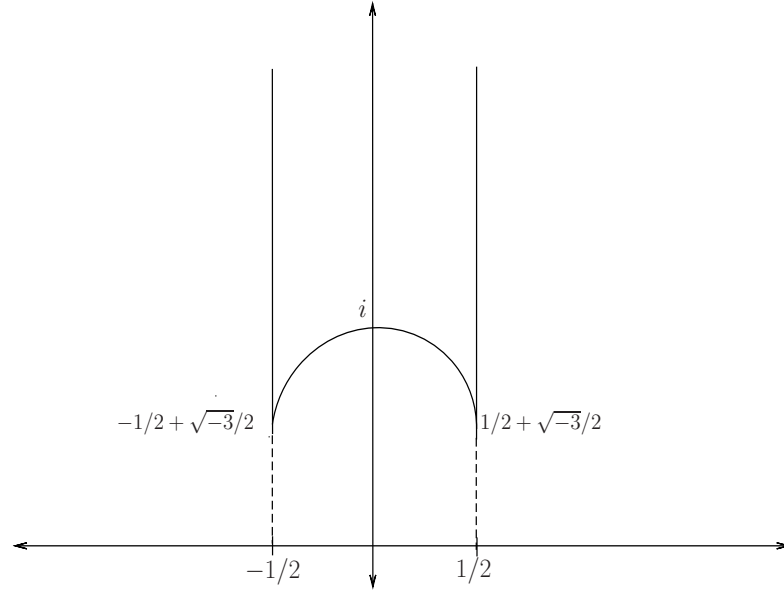
Ahora probaremos que dos puntos en el interior de  $\mathcal{F}$  no son  $\mathcal{G}$ -equivalentes (en realidad se prueba un resultado más preciso).

Suponga que si  $z_1, z_2 \in \mathcal{F}$  son  $\mathcal{G}$ -equivalentes (no estamos suponiendo que  $z_1$  y  $z_2$  son necesariamente distintos o que se encuentran en el interior de  $\mathcal{F}$ ). Sin pérdida de generalidad, supongamos  $Im(z_2) \geq Im(z_1)$ .

Sea  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$  tal que  $z_2 = \gamma z_1$ , ya que la  $Im(z_2) \geq Im(z_1)$ , entonces por (2.10) tenemos  $|cz_1 + d| \leq 1$ . Como  $z_1$  está en  $\mathcal{F}$  y  $d$  es entero, es fácil ver que esta desigualdad es imposible si  $|c| \geq 2$ . Dejando los siguientes casos:

- (i)  $c = 0, d = \pm 1$
- (ii)  $c = \pm 1, d = 0$  y  $z_1$  está sobre el círculo unitario
- (iii)  $c = d = \pm 1$  y  $z_1 = -1/2 + \sqrt{-3}/2$
- (iv)  $c = -d = \pm 1$  y  $z_1 = 1/2 + \sqrt{-3}/2$

- En el caso (i),  $\gamma$  ó  $-\gamma$  es una traslación  $T^j$ , pero tal  $\gamma$  puede llevar un punto de  $\mathcal{F}$  en otro punto de  $\mathcal{F}$  sólo si ésta es la identidad o si  $j = \pm 1$  y los puntos están en las dos líneas de frontera vertical  $Re(z) = \pm 1/2$ .
- En el caso (ii) es fácil de ver que  $\gamma = \pm T^a S$  con  $a = 0$  y  $z_1, z_2$  están sobre el círculo unitario (y situadas simétricamente respecto al eje imaginario) o con  $a = \pm 1$  y  $z_1 = z_2 = \pm 1/2 + \sqrt{-3}/2$ .
- En el caso (iii)  $\gamma$  puede ser escrito como  $\pm T^a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y si ésta aplicación lleva  $z_1$  en  $z_2$  en  $\mathcal{F}$  tenemos  $a = 0$  y  $z_2 = z_1 = -1/2 + \sqrt{-3}/2$  o bien  $a = 1$  y  $z_2 = z_1 + 1 = 1/2 + \sqrt{-3}/2$ .



- En el caso (iv) se maneja de la misma manera como en el caso (iii)

Así, se concluye que en ningún caso  $z_1$ , como  $z_2$  pertenecen al interior de  $\mathcal{F}$ , a menos que  $\pm\gamma$  sea la identidad y  $z_2 = z_1$

Ahora queda demostrar que  $T_w \cong T'_w$ , basta con probar que  $G_w = G'_w$ . Sea  $G_w = \mathbb{Z}w_1 + \mathbb{Z}w_2$ ,  $G'_w = \mathbb{Z}w'_1 + \mathbb{Z}w'_2$  y sea  $z \in G'_w$ , escribimos  $z = nw'_1 + mw'_2$  para algún  $m, n \in \mathbb{Z}$ , entonces existe  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{G}$  tal que:

$$\begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

luego  $w'_1 = aw_1 + bw_2$  y  $w'_2 = cw_1 + dw_2$ , así  $z = nw'_1 + mw'_2 = n(aw_1 + bw_2) + m(cw_1 + dw_2) = (na + mc)w_1 + (nb + md)w_2$  por lo tanto  $z \in G_w$  y tenemos  $G'_w \subset G_w$ . Probemos la otra inclusión, sea  $z \in G_w$ , escribimos  $z = nw_1 + mw_2$

para algún  $m, n \in \mathbb{Z}$ , entonces existe  $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} \in \mathcal{G}$  tal que:

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w'_1 \\ w'_2 \end{pmatrix}$$

luego  $z = nw_1 + mw_2 = n(dw'_1 - bw'_2) + m(-cw'_1 + aw'_2) = (nd - mc)w'_1 + (ma - nb)w'_2$  por lo tanto  $z \in G'_w$  así tenemos  $G_w \subset G'_w$ . Concluyendo que  $G_w = G'_w$  y en consecuencia  $T_w \cong T'_w$  lo que queríamos probar.

### 2.2.3. Superficie de Hopf

**Ejemplo 2.6.** Una superficie de Hopf,  $M_t$ , es definida por  $M_t = \frac{W}{G_t}$ , siendo  $W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  y  $G_t = \{g^n/n \in \mathbb{Z}\}$  donde  $g : (z_1, z_2) \mapsto (\alpha z_1 + tz_2, \alpha z_2)$ ,

$0 < |\alpha| < 1$  y  $t \in \mathbb{C}$ . Entonces  $M_t = \frac{W}{G_t}$  es una variedad compleja compacta.

*Demostración.* Para probar que  $M_t$  sea una variedad compleja, primero probaremos que  $G_t$  actúa propiamente discontinua y libre de puntos fijos sobre  $W$ . Supongamos  $g^n z = z$ ,  $\forall z \in W$  y  $\forall n \neq 0 \in \mathbb{Z}$ , y escribamos

$$g = \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, 0 < |\alpha| < 1 \text{ y } t \in \mathbb{C} \text{ entonces } g^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1}t \\ 0 & \alpha^n \end{pmatrix}, \text{ luego}$$

si  $z = (z_1, z_2)$  tenemos  $g^n z = (\alpha^n z_1 + n\alpha^{n-1}tz_2, \alpha^n z_2)$ , como  $z \in W = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$  y  $g^n z = z$  entonces  $\alpha^n = 1$  una contradicción ya que  $0 < |\alpha| < 1$ . Así decimos que  $G_t$  es libre de puntos de fijos.

Sean  $K_1, K_2 \subset W$  conjuntos compactos cualesquiera. Para decir que es propiamente discontinua, es suficiente probar que el siguiente conjunto

$$\{n \in \mathbb{Z} : g^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} = \{z \in W : z \in K_2 \wedge z = g^n z', z' \in K_1\}$$

sea un finito o esté contenido en un conjunto finito. Entonces, podemos decir que existen constantes positivas  $c$  y  $d$  tal que  $|\alpha| \leq c < 1$  y  $|d| \leq d$ .

Definamos una norma en  $\mathbb{C}^2$  por  $|z| = |(z_1, z_2)| = |z_1| + |z_2|$ , entonces existen constantes positivas  $a$  y  $b$  tal que  $a \leq |z| \leq b$ ,  $\forall z \in K_2$ .

Luego,  $|g^n z| = |(\alpha^n z_1 + n\alpha^{n-1}tz_2, \alpha^n z_2)| \leq |\alpha|^n |z_1| + n|\alpha|^{n-1}|t||z_2| + |\alpha|^n |z_2|$  así tenemos  $|g^n z| \leq (c^n + nc^{n-1}d + c^n)b \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow +\infty$ , para algún  $n$  positivo, por lo tanto existe un número entero  $N > 0$  tal que  $|g^n z| < a$ ,  $\forall n \geq N$  y  $\forall z \in K_2$ .

Afirmamos que existe un entero positivo  $N'$  tal que  $|g^{-n} z| > b$ , para todo  $n \geq N'$ ,  $\forall g^n z \in g^n(K_1)$  y  $\forall z \in K_2$ .

Supongamos lo contrario, que existe una sucesión de puntos  $\{g_\nu z_\nu\}_{\nu=1,2,\dots}$  de  $g(K_1)$ , para alguna sucesión  $\{z_\nu\}_{\nu=1,2,\dots} \subset K_2$ , y existe una secuencia de enteros  $n_1 < n_2 < \dots$ , tal que  $|g^{-n_\nu} z| \leq b$ , para  $\nu = 1, 2, \dots$ ; ponemos  $w_\nu = g_\nu^{-n_\nu} z_\nu$  entonces  $z_\nu = g_\nu^{n_\nu} w_\nu$ , con  $\nu = 1, 2, \dots$ , y si  $w_\nu = (w_\nu^1, w_\nu^2)$  y  $g_\nu = \begin{pmatrix} \alpha_\nu & t_\nu \\ 0 & \alpha_\nu \end{pmatrix}$  se tiene que, para  $\nu = 1, 2, \dots$

$$z_\nu = g_\nu^{n_\nu} w_\nu = (\alpha_\nu^{n_\nu} w_\nu^1 + n_\nu \alpha_\nu^{n_\nu-1} t_\nu w_\nu^2, \alpha_\nu^{n_\nu} w_\nu^2)$$

luego procediendo como antes

$$|z_\nu| \leq (c^{n_\nu} + n_\nu c^{n_\nu-1} d + c^{n_\nu}) b \rightarrow 0$$

cuando  $\nu \rightarrow +\infty$ , contradiciendo que  $\{z_\nu\}_{\nu=1,2,\dots} \subset K_2$ . Por lo tanto

$$\{n \in \mathbb{Z} / g^n(K_1) \cap K_2 \neq \emptyset\} \subset \{n \in \mathbb{Z} / -N' < n < N\}$$

Con esto concluimos que  $G_t$  es propiamente discontinua y libre de puntos fijos sobre  $W$ , así tenemos que  $M_t$ , por teorema 2.3, hereda la estructura canónica de una variedad compleja inducida por  $W$ .  $\square$

**Lema 2.1.** Siendo  $M_t = W/G_t$  como antes, tenemos que  $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$  es una familia analítica compleja.

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M} = \{M_t : t \in \mathbb{C}\} = (W \times \mathbb{C})/G$ , donde tenemos  $G = \{g^n : n \in \mathbb{Z} \text{ y } g(z_1, z_2, t) = (\alpha z_1 + tz_2, \alpha z_2, t)\}$ . Luego,  $G$  es propiamente discontinua y libre de puntos fijos en  $W \times \mathbb{C}$ , para probarlo se procede como antes (en la superficie de Hopf), tomamos un conjunto compacto  $K_1 \subset W$  y un conjunto compacto  $K_2 \subset \mathbb{C}$  y se prueba que

$$\{n \in \mathbb{Z} : g^n(K_1 \times K_2) \cap (K_1 \times K_2) \neq \emptyset\}$$

i.e.  $\{(z, t) \in W \times \mathbb{C} : (z, t) \in (K_1 \times K_2) \wedge (z, t) = g^n(z', t), z' \in K_1 \wedge t \in K_2\}$

sea un conjunto finito. Entonces tenemos que  $\mathcal{M} = \frac{W \times \mathbb{C}}{G}$  es una variedad compleja. Así la proyección de  $W \times \mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  conmuta con  $g$ , induciendo una aplicación holomorfa  $\varpi$  de  $\mathcal{M}$  en  $\mathbb{C}$ . Y claramente el rango de la matriz Jacobiano de  $\varpi$  es igual a 1. De esta manera  $(\mathcal{M}, \mathbb{C}, \varpi)$  es una familia analítica compleja con  $\varpi^{-1}(t) = W/G_t = M_t$ .  $\square$

Al parecer la estructura compleja de  $M_t$  varía a medida que  $t$  varía en  $\mathbb{C}$ , pero no es cierto, veamos por qué?.

Sea  $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $(\mathcal{M}_U, U, \varpi_U)$  la restricción de  $(\mathcal{M}, \mathbb{C}, \varpi)$ . Esto se deduce de inmediato de la igualdad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & t \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

En efecto, introduzcamos nuevas coordenadas  $(w_1, w_2, t) = (z_1, tz_2, t)$  en  $W \times U$ . Entonces en términos de estas coordenadas,  $g$  es representado como

$$g : (w_1, w_2, t) \mapsto (\alpha w_1, \alpha w_2 + w_1, t)$$

En consecuencia  $\mathcal{M}_U = (W \times U)/\mathcal{G} = W/G_1 \times U = M_1 \times U$ , es así que  $(\mathcal{M}_U, U, \varpi_U) = (M_1 \times U, U, \pi)$ .

Por lo tanto  $M_t$  tiene la misma estructura compleja que  $M_1$  para  $t \neq 0$ . Sin embargo, la estructura compleja de  $M_0$  es diferente de  $M_t$  para  $t \neq 0$ . Para ver esto, consideremos un campo vectorial holomorfo sobre  $M_t$ , éste campo es inducido por un campo vectorial holomorfo  $G_t$ -invariante en  $W$ . En lo que sigue, escribiremos  $z' = (z'_1, z'_2)$  en lugar de  $(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2)$  por simplicidad. Bajo esta notación tenemos

$$g_t^m : z = (z_1, z_2) \mapsto z' = (z'_1, z'_2)$$

Sea un campo vectorial holomorfo  $G_t$ -invariante en  $W$ ,

$$v_1(z) \frac{\partial}{\partial z_1} + v_2(z) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

donde  $v_1(z)$  y  $v_2(z)$  son funciones holomorfas en  $W$ . Donde

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \alpha^m \frac{\partial}{\partial z'_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z_2} = m\alpha^{m-1}t \frac{\partial}{\partial z'_1} + \alpha^m \frac{\partial}{\partial z'_2},$$



luego el campo vectorial dado anteriormente es transformado por  $g_t^m$  en el campo vectorial

$$(\alpha^m v_1(z) + m\alpha^{m-1}tv_2(z))\frac{\partial}{\partial z_1'} + \alpha^m v_2(z)\frac{\partial}{\partial z_2'}$$

y como el campo dado es  $G_t$ -invariante, tenemos

$$\begin{aligned} v_1(z') &= \alpha^m v_1(z) + m\alpha^{m-1}tv_2(z) \\ v_2(z') &= \alpha^m v_2(z) \end{aligned} \quad (2.11)$$

De acuerdo con el lema de Hartog, las funciones  $v_1(z_1, z_2)$  y  $v_2(z_1, z_2)$  sobre  $W$  son extendidas a funciones holomorfas en todo  $\mathbb{C}^2$ .

Por lo tanto asumimos que  $v_1(z_1, z_2)$  y  $v_2(z_1, z_2)$  son holomorfas en todo  $\mathbb{C}^2$ . De la ecuación (2.11), tenemos

$$v_2(z_1, z_2) = \frac{1}{\alpha^m} v_2(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2)$$

En consecuencia, dado que  $0 < |\alpha| < 1$ , dejando

$$v_2(z_1, z_2) = \sum_{h,k=0}^{+\infty} c_{hk} z_1^h z_2^k$$

la expansión en serie de potencias de  $v_2(z_1, z_2)$ , tenemos

$$\begin{aligned} v_2(z_1, z_2) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha^m} \sum_{h,k} c_{h,k} (\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2)^h (\alpha^m z_2)^k \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{c_{00}}{\alpha^m} + c_{10}z_1 + \frac{mt}{\alpha} c_{10}z_2 + c_{01}z_2 \right) \end{aligned}$$

Con el fin de que este límite pueda existir para cualquier  $z_1, z_2$ , entonces  $c_{00}$  debe ser cero, y, si  $t \neq 0$ ,  $c_{10}$  debe ser también cero. Por lo tanto tenemos

$$v(z_1, z_2) = c_{10}z_1 + c_{01}z_2$$

donde  $c_{10} = 0$  si  $t \neq 0$ . Así

$$v_1(z_1, z_2) = \sum_{h,k=0}^{+\infty} b_{hk} z_1^h z_2^k$$

Entonces por la ecuación (2.11) tenemos

$$\begin{aligned} v_1(z_1, z_2) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\alpha^m} v_1(\alpha^m z_1 + m\alpha^{m-1}tz_2, \alpha^m z_2) - \frac{mt}{\alpha} v_2(z_1, z_2) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{b_{00}}{\alpha^m} + b_{10}z_1 + \frac{mt}{\alpha} b_{10}z_2 + b_{01}z_2 - \frac{mt}{\alpha} (c_{10}z_1 + c_{01}z_2) \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \left( \frac{b_{00}}{\alpha^m} + \left[ b_{10} - \frac{mt}{\alpha} c_{10} \right] z_1 + \frac{mt}{\alpha} [b_{10} - c_{01}] z_2 + b_{01}z_2 \right) \end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos  $b_{00} = 0$ , y, si  $t \neq 0$ , también tenemos  $b_{10} = c_{01}$ . Por eso

$$v_1(z_1, z_2) = b_{10}z_1 + b_{01}z_2$$

sostiene que  $b_{10} = c_{01}$  si  $t \neq 0$ .

En resumen, si ponemos  $c_1 = b_{10}$ ,  $c_2 = b_{01}$ ,  $c_3 = c_{10}$  y  $c_4 = c_{01}$ , un campo vectorial holomorfo en  $M_0$  es dado por

$$c_1 z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + c_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + c_3 z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} + c_4 z_2 \frac{\partial}{\partial z_2}$$

mientras que un campo vectorial holomorfo sobre  $M_t$ , con  $t \neq 0$  es dado por

$$c_1 \left( z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + c_2 z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}$$

Por tanto hay cuatro campos vectoriales holomorfos linealmente independientes sobre  $M_0$ , mientras que sobre  $M_t$  con  $t \neq 0$ , sólo hay dos tipos. Es así que  $M_0$  tiene una estructura compleja diferente a  $M_t$  con  $t \neq 0$ . Así, la estructura compleja de  $M_t$  da "saltos" en  $t = 0$ .

#### 2.2.4. Superficie de Hirzebruch

El siguiente ejemplo, superficie de Hirzebruch, ha sido tomado de [8]. Se explica aquí de una manera que sea más accesible.

**Ejemplo 2.7.** *Escribamos  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , como  $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$  donde  $U_1 = \mathbb{C}$  y  $U_2 = \mathbb{P}^1 \setminus \{0\}$ . Sea  $\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$  donde  $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$  y  $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$  son el mismo punto en  $\tilde{M}_m$  si cumple que*

$$z_1 z_2 = 1 \quad y \quad \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 \quad (2.12)$$

*Ahora, fijemos un número natural  $k \leq m/2$  y considere el siguiente conjunto algebraico*

$$\mathcal{M} = \{([x_0 : x_1], [y_0 : y_1 : y_2], t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} / x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0\}$$

*denotando  $x = [x_0 : x_1]$ ,  $y = [y_0 : y_1 : y_2]$ , demostremos que  $\mathcal{M}$  es una variedad compleja compacta, para ello definamos la aplicación  $p$  como*

$$\begin{aligned} p : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y, t) &\longmapsto p(x, y, t) = x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + t x_0^{m-k} x_1^k y_2. \end{aligned}$$

*Como  $p^{-1}(0) = \mathcal{M}$ , basta probar que  $p$  es una sumersión sobre  $\mathcal{M}$ , es decir que 0 sea un valor regular de  $p$  en cada abierto. Considere el cubrimiento usual para  $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$  y  $\mathbb{P}^2 = U_0 \cup U_1 \cup U_2$  y denote  $U_{jk} = U_j \times U_k \times \mathbb{C}$  para  $j = 0, 1$  y  $k = 0, 1, 2$ , donde  $\mathcal{M} = \bigcup (U_{jk} \cap \mathcal{M})$ , así se tiene:*

1. En  $U_{00}$ , hacemos  $x_0 = 1$  y  $y_0 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = y_1 - x_1^m + tx_1^k y_2$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = 1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = -mx_1^{m-1} + ktx_1^{k-1}y_2, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = tx_1^k, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_1^k y_2. \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial p}{\partial y_1} \neq 0$  entonces 0 es un valor regular de  $p$  en  $U_{00}$ .

2. En  $U_{01}$ , hacemos  $x_0 = 1$  y  $y_1 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = 1 - x_1^m y_0 + tx_1^k y_2$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = -mx_1^{m-1}y_0 + tkx_1^{k-1}y_2, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = tx_1^k, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = -x_1^m, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_1^k y_2. \end{cases}$$

Para garantizar que al menos una derivada parcial sea distinta de cero, veremos si el conjunto de singularidades en  $U_{01}$  no intercepta  $\mathcal{M}$ , se tiene que  $\text{Sing}(p)|_{U_{01}} = \{((1, 0), (y_0, 1, y_2), t)/t, y_0, y_2 \in \mathbb{C}\}$  y se comprueba que sus puntos no satisface la ecuación  $x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + tx_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0$  entonces no está en  $\mathcal{M}$ , que significa existe alguna derivada parcial diferente de 0, por tanto éste es un valor regular de  $p$  en  $U_{01}$ .

3. En  $U_{02}$ , hacemos  $x_0 = 1$  y  $y_2 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = y_1 - x_1^m y_0 + tx_1^k$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x_0} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = 1, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = -mx_1^{m-1} + tkx_1^{k-1}, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = -x_1^m, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_1^k. \end{cases}$$

Como  $\frac{\partial p}{\partial y_1} \neq 0$  entonces 0 es un valor regular de  $p$  en  $U_{02}$ .

4. En  $U_{10}$ , hacemos  $x_1 = 1$  y  $y_0 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = x_0^m y_1 - 1 + tx_0^{m-k} y_2$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial x_0} = mx_0^{m-1} y_1 + t(m-k)x_0^{(m-k)-1} y_2, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = x_0^m, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = tx_0^{m-k}, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = 0, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k} y_2. \end{array} \right.$$

Analizando como antes,  $\text{Sing}(p)|_{U_{10}} = \{((0, 1), (1, y_1, y_2), t)/t, y_1, y_2 \in \mathbb{C}\}$ , sus puntos no satisface la ecuación  $x_0^m y_1 - x_1^m y_0 + tx_0^{m-k} x_1^k y_2 = 0$  entonces no está en  $\mathcal{M}$ , que significa existe alguna derivada parcial diferente de 0, por tanto éste es un valor regular de  $p$  en  $U_{10}$ .

5. En  $U_{11}$ , hacemos  $x_1 = 1$  y  $y_1 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = x_0^m - y_0 + tx_0^{m-k} y_2$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial x_0} = mx_0^{m-1} + t(m-k)x_0^{(m-k)-1} y_2, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = tx_0^{m-k}, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = -1, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k} y_2. \end{array} \right.$$

Como  $\frac{\partial p}{\partial y_0} \neq 0$  entonces 0 es un valor regular de  $p$  en  $U_{11}$ .

6. En  $U_{12}$ , hacemos  $x_1 = 1$  y  $y_2 = 1$ , luego  $p(x, y, t) = x_0^m y_1 - y_0 + tx_0^{m-k}$ , hallamos sus derivadas parciales respecto a cada variable

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial p}{\partial x_0} = mx_0^{m-1} y_1 + t(m-k)x_0^{(m-k)-1}, & \frac{\partial p}{\partial y_1} = x_0^m, \\ \frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, & \frac{\partial p}{\partial y_2} = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y_0} = -1, & \frac{\partial p}{\partial t} = x_0^{m-k}. \end{array} \right.$$

Como  $\frac{\partial p}{\partial y_0} \neq 0$  entonces 0 es un valor regular de  $p$  en  $U_{12}$ .

Finalmente, queda demostrado que  $\mathcal{M}$  es una variedad compleja compacta, considere la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \varpi : & \mathcal{M} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (x, y, t) & \longmapsto t \end{array}$$

Dado que  $\mathcal{M}$  es una variedad y  $\varpi$  es una sumersión, se tiene que  $\varpi^{-1}(t) = M_t$  son subvariedades holomorfas de  $\mathcal{M}$ , por tanto se concluye que la variedad  $\mathcal{M} = \{M_t / t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{C}$  es una familia analítica compleja.

Visto de otra manera, fijando un número natural  $k \leq m/2$ , podemos describir  $M_t$  como

$$M_t = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$$

donde  $(z_1, \zeta_1) \in U_1 \times \mathbb{P}^1$  y  $(z_2, \zeta_2) \in U_2 \times \mathbb{P}^1$  son el mismo punto de  $M_t$  si

$$z_1 z_2 = 1 \quad \text{y} \quad \zeta_1 = z_2^m \zeta_2 + t z_2^k \quad (2.13)$$

Para  $t = 0$ , tenemos que  $M_0 = \tilde{M}_m$  ya que en este caso la ecuación (2.13) se convierte en la ecuación (2.12).

Para  $t \neq 0$ , introducimos en  $M_t$  las siguientes coordenadas  $(z_i, \zeta'_i)$  en  $U_i \times \mathbb{P}^1$ , siendo  $i = 1, 2$  como sigue

$$\begin{aligned} (z_1, \zeta'_1) &= \left( z_1, \frac{z_1^k \zeta_1 - t}{t \zeta_1} \right) \\ (z_2, \zeta'_2) &= \left( z_2, \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2} \right) \end{aligned}$$

Dado que los factores determinantes obtenidos por los coeficientes de las siguientes transformaciones lineales

$$\zeta'_1 = \frac{z_1^k \zeta_1 - t}{t \zeta_1} \quad \wedge \quad \zeta'_2 = \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2}$$

son dados por

$$\begin{vmatrix} z_1^k & -t \\ t & 0 \end{vmatrix} = t^2 \neq 0 \quad \wedge \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2 & t^2 \end{vmatrix} = t^2 \neq 0$$

respectivamente,  $(z_i, \zeta'_i)$  realmente definen las coordenadas de  $U_i \times \mathbb{P}^1$ . Luego por la ecuación (2.7) tenemos

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= \frac{z_1^k \zeta_1 - t}{t \zeta_1} = \frac{z_1^k (z_2^m \zeta_2 + t z_2^k) - t}{t (z_2^m \zeta_2 + t z_2^k)} \\ &= \frac{z_2^{m-k} \zeta_2}{t z_2^m \zeta_2 + t^2 z_2^k} = z_2^{m-2k} \frac{\zeta_2}{t z_2^{m-k} \zeta_2 + t^2} = z_2^{m-2k} \zeta'_2 \end{aligned}$$

De manera que, en términos de estas nuevas coordenadas, la relación (2.13) es dado por

$$z_1 z_2 = 1 \quad \text{y} \quad \zeta'_1 = z_2^{m-2k} \zeta'_2$$

por lo tanto,  $M_t = \tilde{M}_{m-2k}$ .

Así, para cualquier número natural  $k \leq m/2$ ,  $\tilde{M}_m$  es una deformación de  $\tilde{M}_{m-2k}$ . Por lo tanto, poniendo  $k = m/2$  si  $m$  es par, y  $k = m/2 - 1/2$  si  $m$

es impar, vemos que  $\tilde{M}_m$  es una deformación de  $\tilde{M}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  si  $m$  es par, y una deformación de  $\tilde{M}_1$  si  $m$  es impar. Por tanto, por el teorema (2.2),  $\tilde{M}_m$  es difeomorfo a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  si  $m$  es par y a  $\tilde{M}_1$  si  $m$  es impar.

De este modo  $\tilde{M}_m$  y  $\tilde{M}_n$  son difeomorfos si  $m \equiv n \pmod{2}$ , pero no son biholomorfos si  $m \neq n$ . En consecuencia, en la familia  $\{M_t : t \in \mathbb{C}\}$  descrita anteriormente,  $M_t = \tilde{M}_{m-2k}$  no cambia su estructura compleja para todo  $t \neq 0$ , y la estructura compleja de  $M_t$  pasa a ser  $M_0 = \tilde{M}_m$  en  $t = 0$ .

Demostremos que  $\tilde{M}_m$  no es biholomorfo a  $\tilde{M}_n$  si  $m \neq n$ , calculando el número de campos vectoriales linealmente independientes en ellos.

Para ello, consideremos primero campos vectoriales holomorfos sobre  $\mathbb{P}^1 = U_1 \cup U_2$ . Un campo vectorial holomorfo sobre  $\mathbb{P}^1$  es representado como  $v_1(z_1)(\frac{\partial}{\partial z_1})$  sobre  $U_1$ ,  $v_2(z_2)(\frac{\partial}{\partial z_2})$  sobre  $U_2$ , donde  $v_i(z_i)$  son funciones enteras de  $z_i$  sobre  $U_i$  para  $i = 1, 2$ . Sobre  $U_1 \cap U_2$ , deben coincidir:

$$v_1(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}\right) = v_2(z_2)\left(\frac{\partial}{\partial z_2}\right) \quad (2.14)$$

ya que  $z_1 = 1/z_2$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial z_2} = -z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1}.$$

Luego, sustituyendo ésta expresión en la ecuación (2.14), se obtiene

$$v_1(z_1) = -z_1^2 v_2\left(\frac{1}{z_1}\right).$$

Por tanto, poniendo

$$v_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{1n} z_1^n \quad \text{y} \quad v_2(z_2) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z_2^n,$$

tenemos

$$c_{10} + c_{11}z_1 + c_{12}z_1^2 + \cdots = -c_{20}z_1^2 - c_{21}z_1 - c_{22} - \cdots.$$

Por lo tanto  $v_1(z_1)$  debe ser una cuadrática  $az_1^2 + bz_1 + c$  en  $z_1$ :

$$v_1(z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} = (az_1^2 + bz_1 + c)\frac{\partial}{\partial z_1} \quad (2.15)$$

los campo vectorial holomorfo sobre  $\tilde{M}_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  es dado por

$$(az_1^2 + bz_1 + c)\frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1\zeta_1^2 + \beta_1\zeta_1 + \gamma_1)\frac{\partial}{\partial \zeta_1}.$$

Por consiguiente existe 6 campos vectoriales sobre  $\tilde{M}_0$  linealmente independientes.

A continuación, considere un campo vectorial holomorfo sobre  $\tilde{M}_m = U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$ ,  $m \geq 1$ . A partir de la ecuación (2.15) un campo vectorial holomorfo sobre  $U_1 \times \mathbb{P}^1$  tiene la forma

$$v_1(z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1(z_1)\zeta_1^2 + \beta_1(z_1)\zeta_1 + \gamma_1(z_1)) \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \quad (2.16)$$

donde  $v_1(z_1)$ ,  $\alpha_1(z_1)$ ,  $\beta_1(z_1)$ ,  $\gamma_1(z_1)$  son funciones enteras de  $z_1$ . Similarmente un campo vectorial holomorfo sobre  $U_2 \times \mathbb{P}^1$  es dado por

$$v_2(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + (\alpha_2(z_2)\zeta_2^2 + \beta_2(z_2)\zeta_2 + \gamma_2(z_2)) \frac{\partial}{\partial \zeta_2}, \quad (2.17)$$

donde  $v_2(z_2)$ ,  $\alpha_2(z_2)$ ,  $\beta_2(z_2)$ ,  $\gamma_2(z_2)$  son funciones enteras sobre  $z_2$ .

Para un campo vectorial holomorfo sobre  $\tilde{M}_m$  que tiene la forma de la ecuación (2.16) sobre  $U_1 \times \mathbb{P}^1$ , y la forma de (2.17) sobre  $U_2 \times \mathbb{P}^1$ , se tiene

$$\begin{aligned} & v_1(z_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\alpha_1(z_1)\zeta_1^2 + \beta_1(z_1)\zeta_1 + \gamma_1(z_1)) \frac{\partial}{\partial \zeta_1} \\ &= v_2(z_2) \frac{\partial}{\partial z_2} + (\alpha_2(z_2)\zeta_2^2 + \beta_2(z_2)\zeta_2 + \gamma_2(z_2)) \frac{\partial}{\partial \zeta_2} \end{aligned} \quad (2.18)$$

sobre  $U_1 \times \mathbb{P}^1 \cup U_2 \times \mathbb{P}^1$ . Como  $z_1 = 1/z_2$  y  $\zeta_1 = z_2^m \zeta_2$  por ecuación (2.12), se tiene

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial z_2} = -\frac{1}{z_2^2} \frac{\partial}{\partial z_1} + m z_2^{m-1} \zeta_2 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} = -z_1^2 \frac{\partial}{\partial z_1} + m z_1 \zeta_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1}, \\ \frac{\partial}{\partial \zeta_2} = z_2^m \frac{\partial}{\partial \zeta_1} = \frac{1}{z_1^m} \frac{\partial}{\partial \zeta_1}. \end{cases}$$

Sustituyendo éste resultado en el lado derecho de la ecuación (2.18), y comparando los coeficientes, se tiene

$$\begin{cases} v_1(z_1) = -z_1^2 v_2\left(\frac{1}{z_1}\right), \\ \alpha_1(z_1) = -z_1^m \alpha_2\left(\frac{1}{z_1}\right), \\ \beta_1(z_1) = m z_1 v_2\left(\frac{1}{z_1}\right) + \beta_2\left(\frac{1}{z_1}\right), \\ \gamma_1(z_1) = \frac{1}{z_1^m} \gamma_2\left(\frac{1}{z_2}\right). \end{cases}$$

A partir de éstas igualdades, tenemos  $v_1(z_1) = a z_1^2 + b z_1 + c$ ,  $\alpha_1(z_1) = \sum_{k=0}^m c_k z_1^k$ ,

$\beta_1(z_1) = m a z_1 + d$ , y  $\gamma_1(z_1) = 0$ . Por lo tanto sobre  $\tilde{M}_m$  con  $m \geq 1$ , tenemos  $(m+5)$  campos vectoriales linealmente independientes correspondiente a las constantes arbitrarias  $a, b, c, c_0, c_1, \dots, c_m$  y  $d$  dadas antes.

Así, el número de campos vectoriales holomorfos linealmente independientes sobre  $\tilde{M}_m$  es 5 para  $m = 0$ , y  $(m+5)$  para  $m \geq 1$ . De ahí, si  $m \equiv n \pmod{2}$ , y  $m \neq n$ ,  $\tilde{M}_m$  y  $\tilde{M}_n$  no son biholomorfos.

# Conclusiones

1. La deformación de una variedad compleja compacta  $M$ , compuesta de un número finito de cartas coordenadas, viene dada por el desplazamiento de estas cartas, a través de una aplicación  $\mathbb{C}$ -lineal que va del espacio tangente de la variedad  $B \subset M$ .
2. Podemos Observar que las fibras de las estructuras complejas son  $C^\infty$ -equivalentes, pero analíticamente son distintas, logramos mostrar una teoría moderna de deformación de variedades complejas que sirva para investigaciones posteriores.



# Sugerencias

1. A partir de este estudio podemos presentar la Aplicación Infinitesimal Kodaira-Spencer y medir la variación de las estructuras analíticas complejas.
2. Ver el concepto de Obstrucción a la deformación de una variedad  $M$  y garantizar la existencia de una familia analítica compleja para cualquier campo asociado.

# Bibliografía

- [1] BOTT R. Homogeneous vector bundles *Annals of Math.* **66** (1957) 203–248.
- [2] CARTAN E. *Systèmes Différentiels Extérieurs et Leurs Applications Géométriques* Act. Sci. et Ind. **994**, París, (1945).
- [3] EHRESMANN, C. *Les Connexions Infinitésimales dans un Espace Fibré Différentiable*. Colloque de Topologie à Bruxelles, 29 (1950). S. Kobayashi: Conexión de Variétés Fibrées, C. R., 238, 318 (1954).
- [4] FERNÁNDEZ, P. *Notas de Fibrado Vectoriales y sus Clases Características*. XXIII Coloquio de la Sociedad Matemática Peruana (2005).
- [5] FRÖHLICHER, A. & NIJENHUIS, A. A theorem on stability of complex structures. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **43** (1957) 239-241.
- [6] GUILLERMIN, V. & POLLACK, A. *Differential Topology*. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. Originally Published: Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1974.
- [7] HIRZEBRUCH, F. *Topological Methods in Algebraic Geometry* 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1966.
- [8] HIRZEBRUCH, F. *Über eine Klasse von einfach zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 124 (1951), 77-86. MR 0045384 Zbl 043.30302.
- [9] —, & SPENCER, D. C. *On the variation of almost-complex structure, in Algebraic, Geometry and Topology*. A symposium in honor of S. Lefschetz, pp. 139-150. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [10] —, —: A theorem of completeness for complex analytic fibre spaces *Acta Math.* **100** (1958) 281-294.
- [11] ILLUSIE I. *Complexe tangent et déformations I et II*. Springer, Lecture Notes in Math. **239**, 1971; **283**, 1972.
- [12] KAUP L. KAUP B & BARTHEL G. *Holomorphic functions of several variables: an introduction to the fundamental theory*. Walter de Gruyter & Co. Berlin, 1983, x+353pp

- [13] KODAIRA, K. *Complex Manifolds and Deformation of Complex Structures*. Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao. Reprint of the 1986 English edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. x+465 pp.
- [14] KODAIRA, K. & MORROW, J. *Complex Manifolds*. Holt, Rinehart and Winston, Inc. 1971.
- [15] KODAIRA K. & SPENCER D.C. On deformation of complex analytic structures, I-II, III *Annals of Math.* **67** (1958) 328–466; **71** (1960) 43–76.
- [16] NOETHER, M. *Anzahl der Modulen einer Classe algebraischer Feldchen*. (German) Sitz. Koniglich. Preuss. Akad. der Wiss. zu Berlin, erster Halbband (1888), 123-127.
- [17] RIEMANN, B. Theorie der Abel'schen Functionen (German) *J. Reine Angew. Math.* **54** (1857), 115-155, 88-142.
- [18] RUDIN, W. *Real and Complex Analysis*. Third Edition. Copyright 1987, 1974, 1966 por McGraw-Hill, Inc.
- [19] SARAIVA, N. *Cohomología de Haces y Algunas Aplicaciones a Varias Variables Complejas*. Tesis para optar el Grado de Magister en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. Diciembre-2008.
- [20] VILLARREAL, Y. *Deformaciones de estructuras complejas*. Tesis para optar el Grado de Magister en Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. 2012.